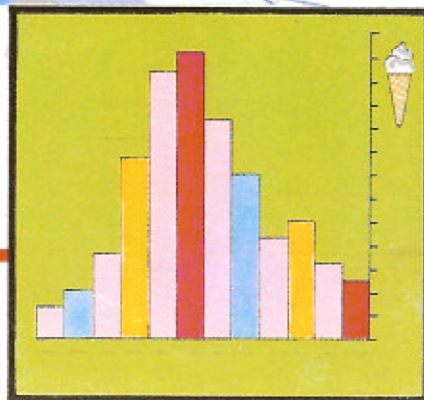
مدخل إلى

الرياضيات







سلسلة اوسبورن

المؤسسة العربية للدراسات والنشر
بناية برج الكارلتون
ساقية الجنزير
تلفون: ٨٠٧٩٠٠/١
برقيا: موكيالي - بيروت
ص.ب: ٥٤٦٠-١١ - بيروت

مدخل إلى الرياضيات
المؤسسة العربية للدراسات والنشر

مدخل إلى

الرياضيات

تأليف

نَايْغِلْ لانْغْدُنْ و جَانِيتْ كُوكْ

ترجمة

د. أحمد سليم سعيدان



المستشار العام للسلسلة د. همام بشارة غصيب

استاذ الفيزياء النظرية في الجامعة الاردنية وعضو مجمع اللغة العربية الاردني

عمان - الاردن

المؤسسة العربية للدراسات والنشر

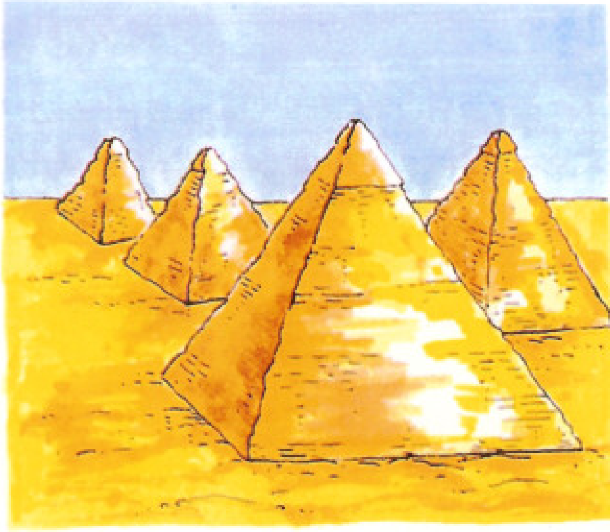
بناية برج الكارلتون
ساقية الجنزير
تلفون: ٨٠٧٩٠٠/١
برقياً: موكيالي - بيروت
ص.ب: ١١/٥٤٦٠ - بيروت

المحتويـــات

هذه ترجمة طبق الأصل للكتاب الذي صدر
بالإنكليزية بعنوان
Usborne Introduction to
MATHS
by
Nigel Langdon and Janet Cook
الطبعة العربية الأولى ١٩٨٨

ما هي الرياضيات؟ :

كان العربُ الأوائلُ يُسمّون الرياضياتِ التّعاليم، نقلاً عن لفظةِ ماثماتيقا اليونانية، وتعني ما نتعلّمه. وهذا يُعطي بعض الجوابِ عن ماهيّةِ الرياضيات. فمنذ أكثرَ من ٤٠٠٠ سنة، منذُ بُنيتْ أهرامُ مصر، إلى عصرنا هذا، عصرِ الجسورِ المعلّقةِ وناطحاتِ السّحاب، ما زالَ الناسُ يَتعلّمون عن العَلاقاتِ بين الأشكالِ والأعداد، كي يتعرّفوا على العالَمِ الذي يَعيشون فيه، ويُسيّروا شؤونه.

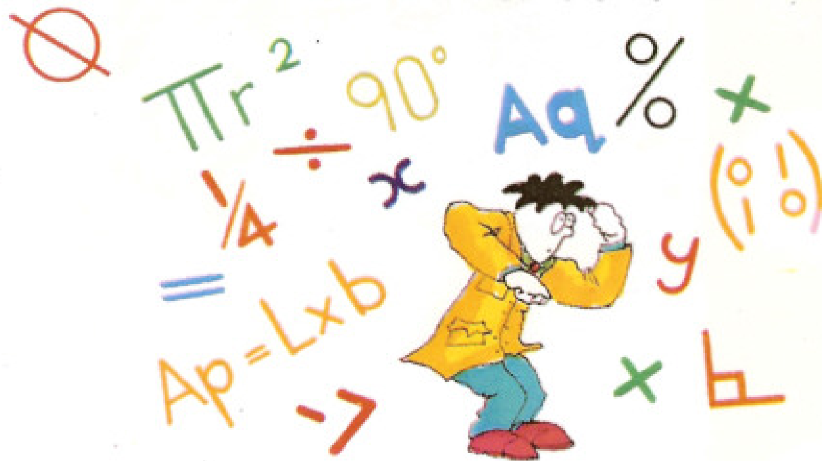


إن وضْعَ الأقمارِ في أفلاكِها في الفَضاء، ووضعَ التصاميمِ المختلفةِ لأوراقِ الجُدران، وقيادةَ السيارات - كلُّ ذلك يعتمدُ على حسابِ الأشكالِ والأعداد، ودقةِ تقديرِها، أي على الرّياضيات. والذي يربطُ بين هذه المفاهيمِ المختلفةِ هو المنطِق. والرياضياتُ تساعدُك على التفكيرِ على نحوٍ أوضح، وبمنطقٍ أسلم.

وأحسنُ طَريقةٍ لفهمِ الرياضيات هي أن تأخُذ ورقةً وقلماً (أو حاسبة) وتحسُب. وفي هذا الكتابِ أسئلةٌ وألغازٌ وُضعتْ لك لتختبرَ نفسَك بنفسك. والأجوبةُ موجودةٌ على الصفحتين ٤٦ و ٤٧.



إذا كنت لا تعرفُ الرموزَ الرياضيّة، فستبدو لك غَريبة. لا تَخفْ فهي مجرَّد إشاراتٍ مختزلةٍ تَدُلّ على جُملٍ بسيطة. وعندما تتعلّمُ أسسَها، سيسهلُ عليك فهمُ الأفكارِ المعقّدة. وعلى هذا لا تتوقعْ أن تفهَم كلَّ شيءٍ دَفعةً واحدة. عالجِ الأمورَ واحداً واحداً.





في بعضِ مسائلِ هذا الكتاب علاماتٌ حمراءُ تُعيّن كم تُعطي لنفسك على الجوابِ الصحيح. إعملْ سجلاً لعلاماتك. فعندما تفرغُ من حلّ كلِّ المسائل، راجع لوحةَ العَلاماتِ على صفحة ٤٧ لتقديرِ ما أنجزت. فإذا حُزتَ على علاماتٍ عالية، فأنت رياضيٌّ فذّ.

وعلى صفحة ٤٥ برامجُ حاسوبٍ بسيطةٌ تختبرُ بها بعضَ النظرياتِ الرياضية، كنظريةِ الاحتمالات. وهذه البرامجُ تصلحُ لمعظمِ أنواعِ الحاسوباتِ المنزليّة. فإذا كان لديك حاسوب، فاختبرْ هذه النظريّات. إنها برامجُ قصيرةٌ لا تستغرقُ أكثرَ من بضعِ دقائق.

عالم الأعداد:

هل تستطيعُ أن تتخيلَ عالَماً بلا أعداد؟ إنّ الأعدادَ جزءٌ هامٌّ في أحاديثِنا اليومية، حتى ليتعذرُ أن نبيعَ ونشتريَ أو أن نُعيّنَ الوقت، دونَ استعمالِ الأعداد. فكّرْ في أيٍّ من الإنجازاتِ التكنولوجية الحديثة، كالأقمارِ الصناعيّة، أو أشعةِ الليزر، أو التلفزيون. لولا علمُ الأعداد، لكانت كلُّ هذه مستحيلة.

كم؟

إن جوابَ السؤالِ كم؟ هو دائماً عدد. إلّا أنّ الأعدادَ بذاتِها قد تكونُ مُضلّلة.



الأجوبةُ كلُّها صحيحة. فكّرْ في كلماتٍ مناسبةٍ تُميّزُ هذه الأعداد(*).

أيُّ واحد؟

تُستعملُ الأعدادُ أيضاً لتمييزِ الأشياءِ وتحديدِها. فالحافلاتُ تحملُ أعداداً، فيُعطى عددٌ واحدٌ للحافلاتِ التي تسيرُ على خطٍّ واحد. ولكلِّ حافلةٍ عدا ذلك عددٌ خاصٌّ يُميّزُها.





العدُّ بالعَشرات:

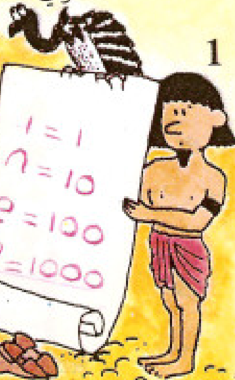
استُعْملتْ في الماضي عدةُ طرقٍ للعدّ. إلا أنها كلَّها تعتمدُ على العدِّ بالعشرات. وذلك لأن معظمَ الناسِ يَعُدّون أحياناً على أصابعهم.

إن سكانَ أستراليا الأصْليّين يسمُّون العَشرةَ بكلمةٍ تعني «يَدَين».

... والمئاتُ والألوف:

معظمُ الأنظمةِ العدديةِ القديمةِ رموزٌ مختلفةٌ للآحادِ والعشراتِ والمئاتِ والألوف. فهل تستطيعُ أن تُترجمَ هذا العددَ المصريَّ القديم؟





عدد مصري





وفي القرونِ الوسطى استعملَ العلماءُ اللاّتين IV لتدلَّ على 4 (خمسة إلّا واحداً). فما قيمةُ CM؟

(*) أجوبةُ الألغازِ والأحاجي على صفحتي ٤٦، ٤٧.

في شماليّ اليابان يتكلّمون لغةَ الـ «إينو» القديمة، وفيها تسمّى العَشرةُ «وان»، ومعناها ذاتُ الجانبين.

تسمّى الرموزُ التي نستعملُها للدلالة على الأعدادِ أرقاماً، وتسمّى في اللاتينية digits ومعناها أصابع

2 كان الرومانُ يَستعملون I، و X، و C، و M. أما الرمزان I، X (1، 10) فيحتمل أنهما انحدرا من كتابةٍ قديمةٍ للأعداد وكان يَجري العد بالحفر على عُصيٍّ خشبيّة.

4

نشأت طريقتُنا الحديثةُ العَشْريّةُ في الهند حوالي ٥٧٠ م وهي أرقى طرقِ كتابةِ الأعداد. فبها يمكنُ كتابةُ أيِّ عددٍ باستعمالِ عَشَرةِ أرقامٍ فقط. وذلك لأنّ دلالةَ الرقمِ تختلفُ باختلافِ ترتيبه. فمثلاً إنّ العددَ 27 يختلفُ عن العددِ 72(*).

التصويرُ بالأعداد:

مثلَما يُعيِّنُ لك كتابُ التلوينِ أيّ ألوانٍ تستعمل، كذلك فإنّ الصورَ التي تُرسَلُ إلى الأرضِ من سُفنِ الفضاءِ والأقمارِ تُبثُّ أعداداً.

فسفينةُ الفضاءِ التي تصورُ كوكباً ما تأخذُ صُوراً تلفزيونيةً ثم تجعلُ كلَّ صورةٍ مربّعاتٍ صغيرةً ويُختبرُ كلُّ مربعٍ بواسطةِ حاسوبٍ في السفينة، فيعطي عدداً من الصِّفرِ إلى 63 للدلالةِ على شدةِ لمعانِه. وتُرسَلُ هذه الأعدادُ إلى الأرضِ حيث يحوِّلُها حاسوبٌ آخرُ إلى صورة.

لعبة بالأرقام:

إليك لعبةً تُستعمل فيها الأرقامُ من 0 إلى 9. يُستعملُ كلُّ رقمٍ مرةً واحدةً في اللعبةِ الواحدة.
والرابحُ هو أولُ من يضعُ في سطرٍ واحدٍ ثلاثةَ أرقامٍ مجموعُها 10.

هل ثَمّةَ عددٌ أكبر؟

تخيلْ أكبرَ عددٍ يمكنُ أن يخطرَ على بالِك. هل يمكنُك أن تضيفَ إليه 1؟.

يستعملُ الرياضيّون الرمزَ ∞ (واسمُه اللّانهاية) للدّلالةِ على أعدادٍ لا يمكنُ أن تعُدَّها، ولو عَدَدتَ إلى الأبد.

(*) في الصفحتين ٦ و ٧ مزيدٌ عن النظامِ العَشْريّ.

النظام العَشْريّ:

يُتيحُ لنا النظامُ العَشْريُّ كتابةَ أيِّ عددٍ صحيحٍ باستعمالِ ما لا يزيدُ عن عَشَرةِ رموزٍ هي 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9. وقيمةُ كلِّ رمزٍ منها تتغيرُ بتغيرِ موقعِه في العدد.

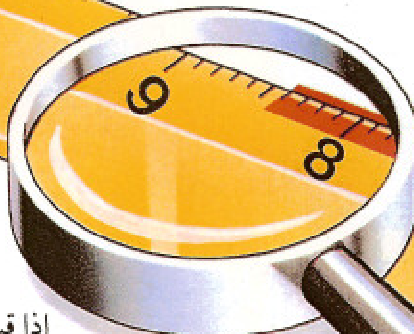


بقراءتنا من اليمين إلى اليسارِ، يدلُّ الرقمُ الأول على آحاد، والثاني على عَشَرات، وهكذا. يمكنُك أن تكتبَ في أيِّ منزلةٍ من 0 إلى 9 قبلَ أن تنتقلَ إلى المنزلةِ التي تليها.

الكسور العَشْرية:

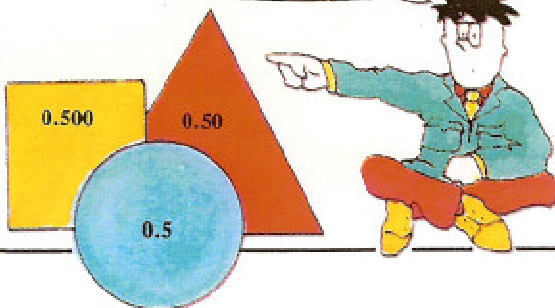
وكما يُمكِّنُنا هذا النظام من كتابةِ الأعدادِ الكبيرةِ جداً فإنّه يُمكِّنُنا من كتابةِ الأعدادِ الصغيرةِ جداً.
فالكسور هي الأعداد التي تقعُ إلى يمينِ الفاصلة العَشرية وتُمثِّلُ أجزاء الأعشار فأجزاءَ المئات فأجزاءً من الآلاف، وهكذا.





إذا قسمت المسافة بين 8، 9 إلى عَشَرة أجزاءٍ تجد أن طولَ الخطِّ قريب من 8.4 سم. يمكنُك أن تكون أكثر دِقّة بتقسيم هذه الأجزاءِ الصغيرةِ إلى عَشَرةِ أجزاءٍ أصغر، وعندها تجد أن طول الخطِّ 8.41 سم وإذا قسمت هذه الأجزاء الصُغرى إلى أجزاءٍ أدقَّ فقد تجد أنّ طول الخطِّ 8.409 أو 8.411 سم.

أعمِلْ عقلَك





تدوير الأعداد (تقريبها) :

رغم أنّ النظامَ العَشْريّ يمكّننا من كتابةِ الأعدادِ بأدقّ تفاصيلها، إلاّ أن ثلاثةَ أرقام مفيدة تفي بالغرض. ففي سباقِ المسافاتِ الطويلةِ كان عددُ المشاهدين 156432 وقد يقول أحدُهم أن عددَ المشاهدين كان 156000 .

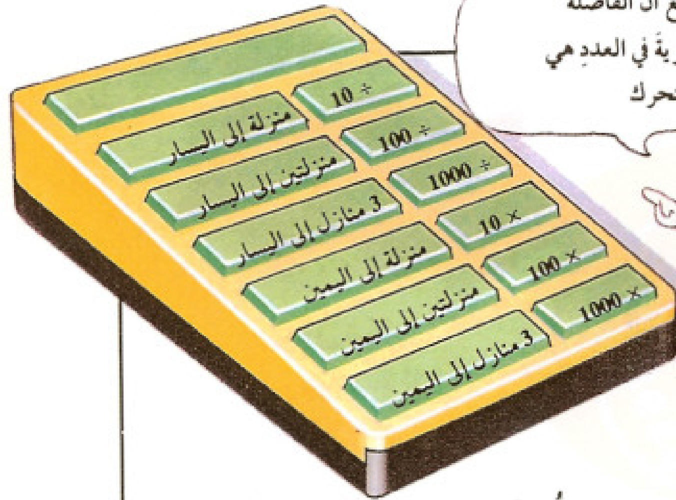


قواعدُ التدوير : لتدويرِ العددِ إلى ثلاثةِ أرقامٍ مفيدة، انظر أولاً إلى الرقمِ الرابع .

أ) إذا كان أقلَّ من 5 فاستعمل الأرقامَ الثلاثةَ الأولى واستبدل بالأرقامِ المتبقية أصفاراً .

ب) إذا كان الرقمُ الرابعُ 5 أو أكثر أضفْ واحداً إلى الرقمِ الثالث إلى يساره واستبدل الباقية بأصْفار .

هل يمكنُك تدويرُ هذه الأعداد.





تحريكُ الفاصلةِ العَشْرية :

العددان التاليان هما تقريباً 300 و 3 .

فأوّلُهما أكبرُ من الثاني بمئةِ مرة :

فعندما تضربُ 2.974 بـ 100 يظهر كأن الفاصلة العَشْرية قفزت منزلتينِ إلى اليمين .

القسمةُ على كسورٍ عَشرية :

عند القسمة على كسورٍ عشرية دون استعمالِ الآلةِ الحاسبة يَسْهُلُ أن تنقلَ الفواصلَ العشريةَ بحيث تصيرُ الأعدادُ صحيحة .

35 ÷ 0.7 تساوي 350 ÷ 7 .

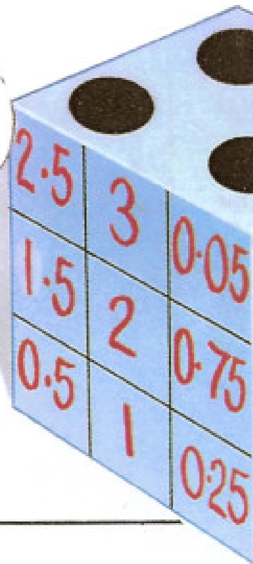
عندما تستعملُ الآلة الحاسبة في الضرب والقسمة قد يحدثُ أن تضغطَ غيرَ الزرّ المطلوب، استعملْ هذه القاعدةَ كي تتأكد أنّ جوابَك قريبٌ مما تتوقع .

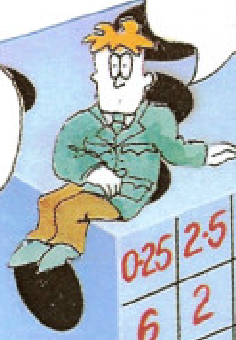
لعبة النَّرْد أو (الزّهر) :

هذه لعبةٌ بين شخصين يَرْميان النردَ أو (الزهر) بالتناوب .



2.5	3	0.05
1.5	2	0.75
0.5	1	0.25





0.25	2.5	3	15	12	3
6	2	2.5	0.75	1.5	5
1.5	0.5	1.25	1	6	0.05
1	3	0.25	0.5	2	0.75
0.2	1.5	6	4.5	3	1
1.5	12	2	7.5	1.5	4

الصفرُ والأعدادُ السّالبة :

ما الصّفر؟ هل هو شيءٌ ما، أم هو لا شيء؟ هل هنالك ما هو أقلُّ من الصّفر؟ هذه أسئلةٌ يَسهُلُ علينا الآن الإجابةُ عنها، ولكنّها كانت تُحيّرُ الرياضيين الأقدمين. ولذا فإنّ استعمالَ الصفرِ في الرياضيات جاء متأخراً. ولم تدخلُ فكرةُ استعماله إلى أوربا إلا في العصور الوسطى، ومصدره الهند. ودخل عن طريق العرب.

قد يدلُّ الصفرُ أيضاً على قياسٍ معينٍ. فمثلاً 0°C هي درجةُ الحرارةِ التي عندها يتجمّدُ الماء والأعداد السالبةُ تُستعملُ لتدلَّ على مقاديرَ دون قياسٍ معيَّن. فمثلاً 11°C − تعني درجةَ حرارةٍ دونَ درجةِ التجمّدِ بإحدى عشرة درجة.

لقد حيَّر الصفرُ الرّياضيين الأقدمين، لأنه لا يمثّلُ شيئاً، إلا أنه يُغيّرُ قيمَ الأعدادِ الأخرى إذا وُضِعَ مُتاخِماً لها.

تُعطى الأوقاتُ أحياناً على شكل أعدادٍ مُوجبةٍ أو سالبة، بالنسبةِ إلى لحظةٍ هامة، كلحظةِ انطلاقِ الصاروخِ في الفضاء.

جمعُ الأعدادِ السّالبة :

قد يكون جمعُ الأعدادِ السالبةِ مُربكاً. وستجدُ في أسفلِ هاتين الصّفحتين طريقاً للأعداد قد يُساعدُك. عند إجراء أي جمع، فتش عن شيئين: الرُّموز والإرشادات.

هناك إرشاداتٌ في أي عمليةٍ حسابية. أما إذا لم يكن مع العدد رمز فهو مُوجب 4 + 4.

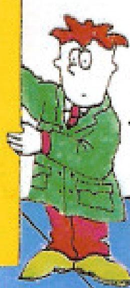
استعمالُ طريقِ الأعداد :

لمعرفة مجموع ‎− 3 − 5‎ ابدأ عند شَريحة ‎− 3‎. ولأنك ستطرحُ منه العدد 5، انظرْ إلى اليسار. والمجموع يقول اطرح 5، والخمسة موجبة. تحرك إلى الأمام خمس منازل. المربّعُ الذي تصل إليه هو ‎− 8‎. وهذا هو الجواب.



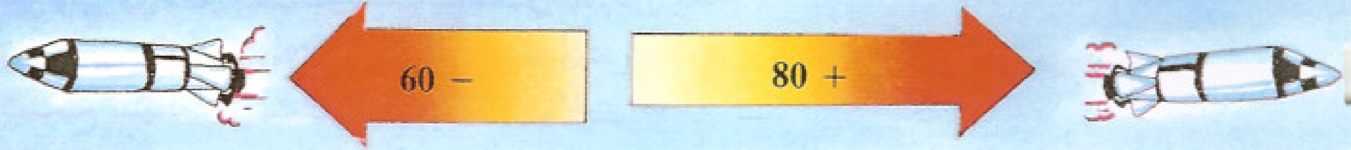
قواعـد :

لجمع أيّ عددين انظر إلى اليمين. ولطرحِ أيّ عدد انظر إلى اليسار. إذا كان العدد موجباً، تحرك إلى الأمام وإذا كان سالباً تحرك إلى الخلف.



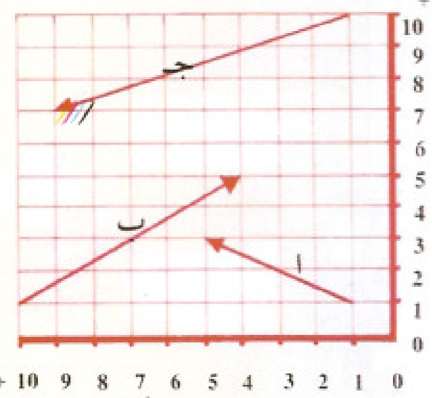
المُوَجِّهات :

من الاستعمالاتِ المهمّة للأعداد السالبةِ استعمالُها مع الموجّهات . والموجّهاتُ هي مقاديرُ تمثّلُها سهام تبيّنُ حجمَها واتجاهَها .

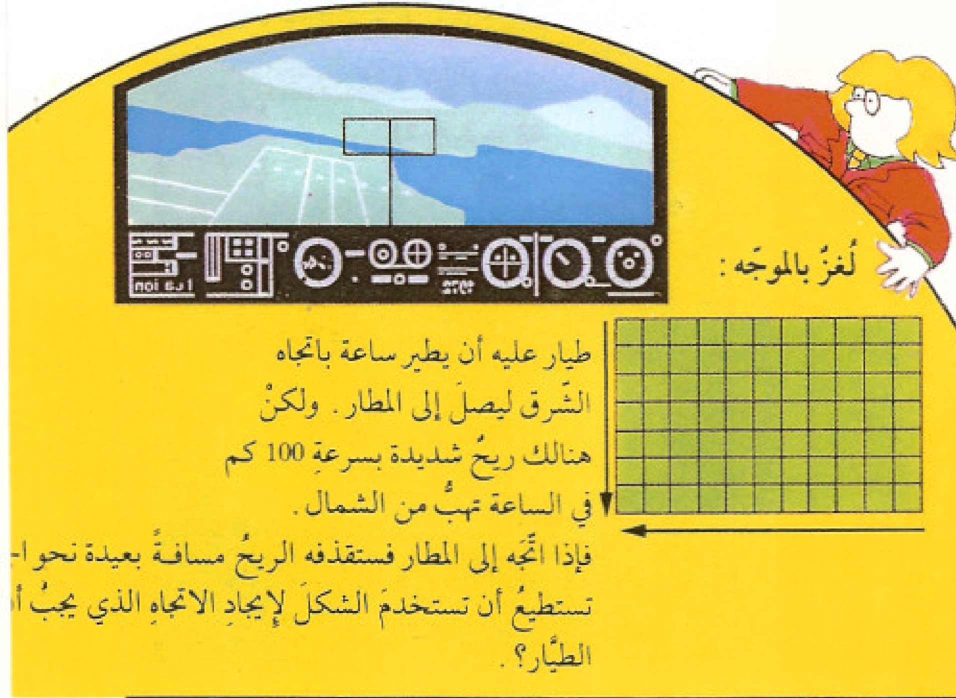


فالصاروخُ الذي يسيرُ بسرعة 80 كم في الثانيةِ متجهاً غرباً يُمَثَّلُ هكذا. وطولُ السهم يَدُلُّ على سُرعةِ الصاروخ .

والصاروخُ الذي يسيرُ بسرعةِ 60 كم في الثانيةِ شرقاً يُمَثَّلُ هكذا. السالبةُ تدلُّ على أنه يسيرُ بعكسِ الاتجاهِ الموجب (غرباً) .



على شبكة كهذه نُعبِّر عن الموجّهات بِعَدَدَيـن . فالموجّهُ A هو $\binom{4}{2}$ لأنه يسيرُ 4 مربعات يميناً ومربعين إلى أعلى . فما هما الموجهان B، C؟ . .



لُغزٌ بالموجّه :

طيار عليه أن يطير ساعة باتجاه الشّرق ليصلَ إلى المطار . ولكنْ هنالك ريحٌ شديدة بسرعةِ 100 كم في الساعة تهبُّ من الشمال .

فإذا اتّجه إلى المطار فستقذفه الريحُ مسافةً بعيدة نحو ا
تستطيعُ أن تستخدمَ الشكلَ لإيجادِ الاتجاهِ الذي يجبُ أ
الطيّار؟ .

الضَّـرْب :

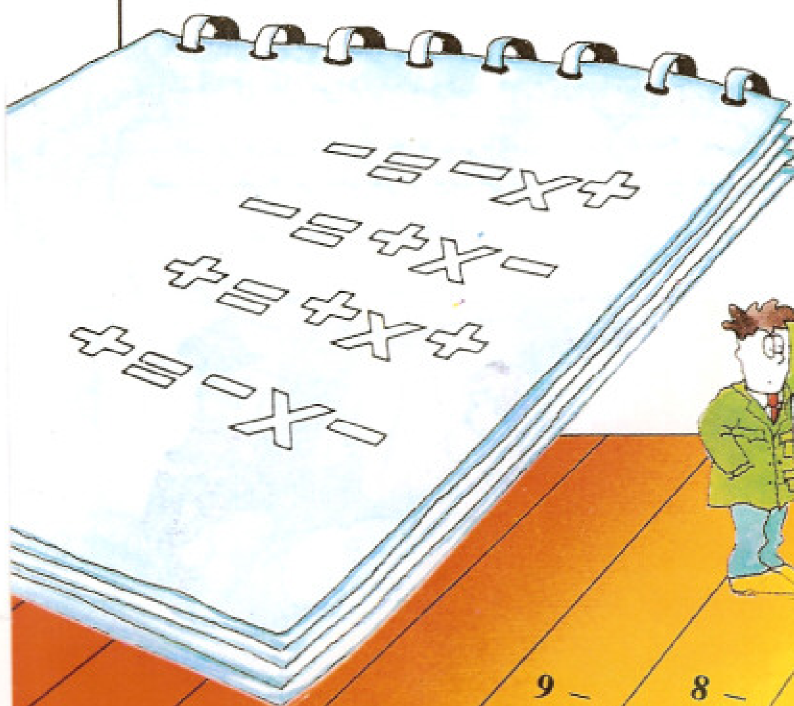
يمكنُك أيضاً أن تستخدمَ طريقَ الأعداد في عمليةِ الضرب . ذلك أنّ الضربَ هو عمليةُ جمعٍ (أو طرحٍ إذا كان العددُ سالباً) متكررة . الفرقُ الوحيدُ هو أنك مجبرٌ على أن تبدأ من الصّفر .

$$15 = 5 + 5 + 5 + (0) = 5 \times 3$$
$$^{-}15 = ^{-}5 + ^{-}5 + ^{-}5 + (0) = ^{-}5 \times 3$$
$$15 = ^{-}5 - ^{-}5 - ^{-}5 - (0) = ^{-}5 \times ^{-}3$$

جرّبْ هذه الحساباتِ على خطِّ مَسارِ الأعداد :
3 × 1، 2 × 4، 3 × 2

ألعابٌ سريعة :

إذا تحقّقت من إجاباتِك فستجدُ أنّ هذه القواعدَ صَحيحة .



9 −　8 −　7 −　6 −　5 −　4 −　2 −

استعمِلْ عقلَك :

ليس من الضروريّ أن تكونَ عبقريّاً حتى تُبدِعَ في الرياضيّات . بل كلُّ ما تحتاجُه هو أن تكونَ على معرفةٍ بالأعدادِ والأشكال . فهذا يساعدك على التعرف على نماذجَ منها ، وهو أفضلُ بكثيرٍ من محاولةِ حفظِ القواعدِ الكثيرةِ عن ظَهرِ قَلب . وفي هاتين الصّفحتين لمحات تساعدُك في الضّرب والقِسمة .

ليس هنالك طريقةٌ محدودةٌ لإحصاء الأعداد . فعليكَ أن تقررَ بنفسك أيَّ طريقةٍ تسلكُ للحصولِ على الجوابِ الصحيحِ بسهولة . هل لك أن تفكر في ابتكار طرقٍ أخرى مختصرة .

2 ، 4 ، 8

للضرب في 4 ضاعفْ العددَ ثم ضاعف النتيجة

مثلاً 21 × 4 .

42 = 2 × 21
84 = 2 × 42

فيكون 21 × 4 = 84

وللضرب في 8 ضاعف العددَ ثلاثَ مرات .

مثلاً 12 × 8 :

24 = 2 × 12
48 = 2 × 14
96 = 2 × 48

فيكون 12 × 8 = 96 .

والقسمةُ عكسُ الضّرب ، فللقسمة على 4 نَصِّف العددَ ثم نَصِّف النتيجة . فما نتيجةُ 128 ÷ 8؟

الضربُ في 9

انظرْ إلى جدولِ الضربِ في تسعة :

9	=	9	×	1
18	=	9	×	2
27	=	9	×	3
36	=	9	×	4
45	=	9	×	5
54	=	9	×	6
63	=	9	×	7
72	=	9	×	8
81	=	9	×	9
90	=	9	×	10

9 = 1 + 8

9 = 2 + 7

رقما الجواب مجموعُهما دائماً 9 .

هل ينطبقُ هذا على ضربِ أعدادٍ كبيرةٍ في 9؟

477 = 9 × 53

18 = 4 + 7 + 7
9 = 1 + 8

احتجنا هنا إلى خُطْوتين إلّا أن مجموعَ الأرقام كان 9 . هذه طريقةٌ مفيدةٌ للتحققِ من صحةِ الجواب . وهي تساعدُك في حالةِ القسمةِ على 9 . هل رقمُ 684 يقبل القسمةَ على 9؟

الضربُ في 11 :

ربما كان جدولُ الضربِ في 11 ، أسهلَ الجداول .

22 ، 33 ، 44 ، 55 ، 66 ، 77 ، 88 ، 99 ، . . . . .

إليكَ طريقةٌ سهلةٌ لضرب 11 في عددٍ منْ منزلتين :

297 = 11 × 27

اجمع 2 و 7 و

ضع الجواب فيما بينهما

جرِّبْ هذه الطريقةَ في أعدادٍ أخرى .

مهرج يتلاعب بالأعداد :

كان جورج بدرْ ماهراً في اكتشاف طرق سهلة لحل المسائل المعقدة . ثم صار فيما بعد يعرض مهاراته على الجماهير في المعارض وفي سنة 1815 حلَّ هذه المسألة في أقل من دقيقة ، وكان عمره يومها تسع سنوات .

يبعد القمر عن الأرض 123256 ميلاً . فإذا كانت سرعة الصوت 4 أميال في الدقيقة* . وحدث انفجار على سطح الأرض ، فكم يمضي من الوقت حتى يسمع الانفجار على سطح القمر؟

* نعرف اليوم أن سرعة الصوت 12.5 ميل في الدقيقة .





عقـلٌ إلكترونـيّ :

نحن في عصرِ الحاسبةِ والحاسوب . ومع ذلك يستطيعُ العقلُ البشريُّ أن يعملَ بسرعةٍ عجيبة . وربما كانت شاكنتالا ديفي أسرعَ الرياضيّين في العالَم . إنها تعيشُ في بنغالور في الهند ، ولكنّها تقضي معظمَ وقتِها سائحةً في العالَم تعرضُ مهارتَها .

ألقتْ محاضرةً مشهورةً في تكساس . فسألَها الحاضرون : ما العددُ الذي إذا ضُرب في نفسِه 23 مرة يُعطي هذا الجواب؟ .

916748676920039158098660927585380162483106680144308622
2407126516427934657040867096593279205767480806790022 7
8301635492485238033574531693511190359657754734007568 1
6883056 20821016 1291328455 46805780 158 806771

لقد حلّـت شاكنتالا هذه المسألةَ في خمسين ثانية . وأرادَ الطلابُ أن يتحقّقوا من صحةِ جوابها ، فاستعملوا حاسوبَ يونيفاك 1108 فصرفَ الحاسوبُ دقيقةً كاملة ، ثم أيّد صحةَ جوابها . ولكنّ برمجةَ المسألةِ في الحاسوب احتاجت إلى تعليماتٍ عددُها 13,000 .

الضربُ في 10 :

للضربِ في 10 ضعْ صفراً على اليمين لتغييرِ منازلِ الأرقام . مثال : 25 × 10 .

$$10 \times 25$$
$$250$$

ولضربِ أيِّ عددٍ في 100 ضعْ صفرين . . .

$$100 \times 32$$
$$3200$$

لأنّ الضربَ في 100 مثلُ الضربِ في 10 مرّتين .
فكيف تضربُ في 1000؟ .

الضربُ في 15 :

للضربِ في 15 تذكّرْ أن 15 هي 10 ونصفُ عشَرة .
مثال : 32 × 15

$320 = 10 \times 32$

$160 = 5 \times 32$

جَمْعُ الجوابين : 480

وهكذا فإن $32 \times 15 = 480$

جرِّب إيجادَ مجموعِ ما يلي :
أ) 8×15
ب) 36×15
جـ) 92×15

طالـبٌ يغلب معلّمَه :

أرادَ معلّمُ كارل غاوس أن يبقيَ طلابَه صامتين ساعة كاملة فأعطاهم هذه المسألة .
فانصرفَ رفاقُ كارل يجمعون الأعدادَ على ألواحِهم . إلاّ أن كارل توصّلَ إلى الجواب في ثوانٍ معدودة . وكان عمرُه تسعَ سنوات .

جِدْ مجمـوع :
1 + 2 + 3 . حتى 1000

وُلد كارل سنة 1777 وصارَ من كبارِ رياضيّي العالَم . لقد استنْبَطَ حيلةً جميلةً لحلِّ هذه المسألة . فهل تستطيعُ أن تعرفَها؟ وأن تجدَ الجواب؟ .



حاشية : 1 + 1000 ، 2 + 999 ، 3 + 998 الخ .
كلُّها تساوي 1001 .

أشكالٌ في كلّ مكان:

كثيراً ما يُعرِّفون الرياضياتِ بأنها علمُ الأعداد، لكن هذا دون نصف التعريف. فالرياضيات تُعنَى أيضاً بالأشكالِ وتصنيفِها في مجموعات. فإذا تمّ هذا التصنيفُ صار بالإمكان إيجادُ قواعدَ تسري على كلِّ صنف. لكلّ شيءٍ في العالَم شكل، تستوي في ذلك حباتُ الثلجِ الصغيرةُ التي تتساقط من السماء وناطحاتُ السحابِ الكبيرة. وأسهلُ الأشكالِ تصنيفاً تلك التي تتكوّنُ من خطوطٍ مستقيمة، وفي هاتين الصفحتين بعضٌ من هذه الأشكال.

ما طولُها؟
كم ورقةً فيها؟
ما شكلُ الوَرقة؟

إن تصنيفَ الأشياءِ في مجموعاتٍ مهمٌّ في مناسباتٍ كثيرةٍ، كتحديدِ فصائلِ الأشجار.

تصنيفُ الأشكال:

تسمّى الأشكالُ حسبَ عددِ الأضلاعِ والزوايا فيها. والأشكالُ المبيّنةُ هنا في كلٍّ منها ثلاثةُ أضلاعٍ أو أكثر، وتسمّى مُضلَّعات، أي ذاتَ أضلاع. والمضلَّعُ شكلٌ مُغلَقٌ منبسط تَحُدُّه خطوطٌ مستقيمة. سمِّ هذه المضلَّعاتِ باستعمالِ القائمةِ التالية.

المثلّثُ له ثلاثةُ أضلاع.
الشكلُ الرُّباعيُّ له أربعةُ أضلاع
الشكلُ الخُماسيُّ له خمسةُ أضلاع
الشكلُ السداسيُّ له ستةُ أضلاع

راجعْ الصفحتين 18 و 19 لدرسِ ذَواتِ الأبعادِ الثلاثة وأشكالٍ أخرى أكثرَ تعقيداً.

المضلعات المتماثلة:

هذا مبنى دوائرِ وزارةِ الدفاعِ الأميركيّة.

ماذا تسمّي هذَا الشّكل؟

المضلَّعُ المتماثل هو الذي تَكونُ أضلاعُه متساويةً وزواياه متساوية.
كم ضِلعاً يجبُ أن يكونَ للمضلَّعِ حتى يصيرَ دائرة؟



عائلة المثلثات :

يمكنُ تصنيفُ المثلّثاتِ حَسب أضلاعِها .

المثلث المختلفُ الأضلاع أضلاعُه مختلفةٌ في الطُّول .

المثلثُ المتساوي السّاقين فيه ضلعان متساويان في الطول .

المثلثُ المتساوي الأضلاع أضلاعُه الثلاثةُ متساوية .



هل تستطيعُ أن ترسمَ مثلثاً أضلاعه ٥ سم، ٣ سم، ٩ سم؟

المربعات والمستطيلات :

ليس سهلاً تصنيفُ الأشكالِ الرُّباعيةِ في مجموعات .



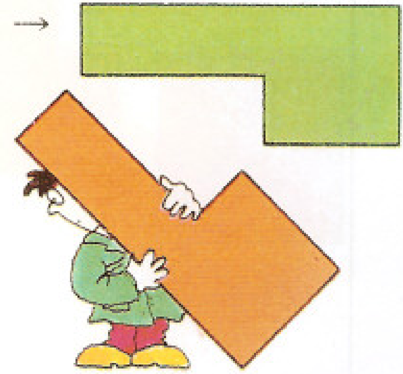


المستطيل شكلٌ رباعيٌّ زواياه الأربعُ قائمة وأضلاعُه المتقابلةُ متوازية .

وهذا التّعريفُ يجعلُ المربعَ أيضاً مستطيلاً .

ومتوازِي الأضلاع أضلاعُه المتقابلةُ متوازية، وهذا يجعلُ المربعَ متوازيَ الأضلاع أيضاً .

أشكالٌ مُتماثلة :



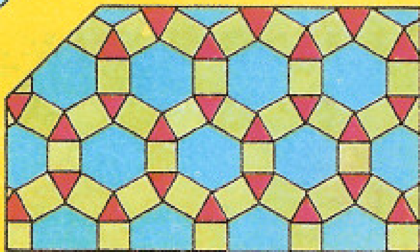
هل هذان الشّكلان مُتشابهان؟ إذا أخذت أحدَهما وقلَبْته ووضعته فوقَ الآخر، تجدُ أنه ينطبقُ عليه تمامَ الانطباق . وهذا معناه أنهما مُتطابقان، لأنّ لهما أضلاعاً متساويةً وزوايا متساوية .

هذا الشكل لا يطابقُ الشكلين اللذين على اليسار، ولكنه مثلهما . إنه تكبيرٌ لأيٍ منهما . فهو رياضياً مشابه لكلٍ منهما .

تلاؤم الأشكال :

يمكن صنعُ نماذجَ جذّابةٍ (تدعى فسيفساء) بوضعِ أشكالٍ مختلفةٍ جنباً إلى جنب . وكان الرومان يُزيّنون جُدرانهم وأرضَ حُجراتهم بقطعٍ صغيرةٍ من الفُسَيفساء .





أيُّ المضلَّعات الثلاثة استُعمِلت في صُنعِ هذه الفُسَيفساء .

قيـاس السـطوح:

أيُّها أكبر: بورتُوريكو أم جمَايكا؟ حجمُ سطح أيّ شكل هو مِساحتُه. ونستطيعُ أن نحسبَ مِساحاتِ الأشكالِ المتناسقة بسهولة، كما سَترى بعدَ قليل. ولكنْ كثيراً ما يستحيلُ أن نجدَ بالدقةِ مِساحةَ الشكل غيرِ المتناسق، وتقديرُكَ للجوابِ يعتمدُ على مدَى الدّقةِ المطلوبة.

جمَايكا

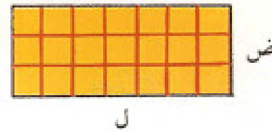
بورتوريكو

هذان معاً يُساويان 1 كم².

لإيجاد تقديرٍ تقريبيّ للمِساحة يمكنُكَ أن تُقسّمَ الشكلَ إلى مُربَّعات 1كم × 1 كم، تَعدُّ المربَّعات الكاملةَ، والأجزاءَ الكبيرةَ فقط. يكونُ التقديرُ في هذه الحالة 40 كم².

وتستطيعُ أن تصلَ إلى تقديرٍ أدقَّ بالمزاوجة بين أجزاءِ المربَّعات.

مِساحاتُ المستطيلات:



أ = ل × ض

إذا كان الشكلُ مُستطيلاً يمكنُكَ حسابُ المربَّعاتِ بسهولة، وذلك بضربِ الطول في العرض.

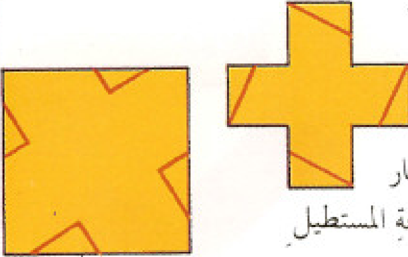
فمِساحةُ هذا المستطيل هي 7 × 3 = 21 مربَّعاً. والقاعدةُ لإيجادِ مِساحةِ المستطيلِ هي:

م △ = ل × ض

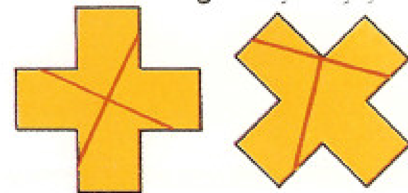
ماذا تَعني هذه الأحرف؟.

إعادةُ تنظيمِ الأشكالِ المُتصالبة:

كثيراً ما يكونُ من السهل إيجادُ مِساحةِ الشكلِ المعقَّد بتقسيمهِ إلى أجزاء، وإعادةِ تنظيمِها بحيث تُكوِّنُ شكلاً أكثرَ تناسقاً. والمساحةُ في هذه الحالةِ لا تتغيّرُ، لأنَّ الأجزاءَ بَقيت كما هي، وإنما تغيَّر ترتيبُها.



إذا قَطعت هذا الشكلَ المتصالبَ عندَ الخطوطِ الحمراءِ وأعدتَ ترتيبَه فإنكَ تحصلُ على المربعِ الظاهرِ إلى اليسار وعندها تستطيعُ أن تستعملَ قاعدةَ مِساحةِ المستطيل لإيجادِ مِساحةِ الشكل.



ارسمْ هذين الشكلين المتصالبين وقُصَّهما عند الحافَات وعندَ الخطوطِ الحمر. الآنَ طابقْ بين الأجزاء تجدْ أنهما يُكوِّنان مُربَّعين.

وحدات القياس:

ونستعملُ المترَ المربَّع (م²) والياردة المربَّعة لقياس مِساحاتِ قِطعِ القُماش.

نستعملُ السنتميترَ المربَّع (سم²) أو البُوصة المربعة لإيجادِ المِساحاتِ الصغيرةِ مثلَ مِساحةِ البَلاطة.

قواعدُ إيجادِ المساحة :

بما أن إعادةَ ترتيبِ الشكلِ لا تغيّرُ مساحتَه فيمكنُ أن نستعملَ قاعدَة مساحةِ المستطيلِ لإيجادِ مساحاتِ أشكالٍ كثيرة .

١ ـ متوازياتُ الأضلاع :

إذا قَطعت أحدَ طَرَفي المتوازي الأضلاع على خطٍّ قائم الزوايا، وألصقت هذا الجزءَ في الطرفِ الآخرِ تحصلُ على مُستطيل .

م ▱ = ل × ض

الحرف م يرمز إلى متوازي الأضلاع .

مساحةُ متوازي الأضلاعِ مثلُ مساحةِ المستطيلِ الذي له نفسُ الطولِ ل، ونفسُ العرضِ العموديِّ ض .

هذا الخطُّ عموديٌّ مع القاعدةِ لأنه يشكل زوايا قائمةً معها .

٢ ـ المثلثات :

يمكنُ أن ترسمَ مُستطيلاً حولَ أيِّ مثلّثٍ متخذاً قاعدةَ المثلّثِ قاعدةً للمستطيل .

سمّينا القاعدة ل . أمّا ارتفاعُ المستطيلِ فهو نفسُه ارتفاعُ المثلّثِ فوق القاعدة .

م △ = $\frac{1}{2}$ (ل × ع)

علِّم الشكلَ وقُصَّ المثلّثين الجانبيَّيْن بحيث يكوّنان معاً مثلّثين متساويين .

مساحةُ المثلّث نصفُ مساحةِ المستطيل .

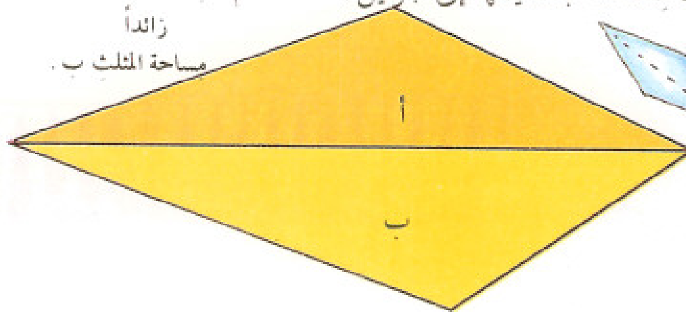
ع

ل

٣ ـ الأشكالُ الرباعيّة :

كلُّ شكلٍ رباعيٍّ يمكنُ تقسيمه إلى مُثلثين .

فيمكنُك أن تحسبَ مساحتَه بتقسيمها إلى جُزأين .



أحجية

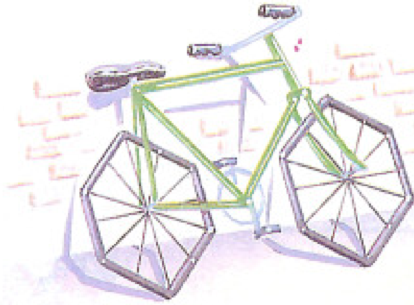
كيف يمكنُك أن تجدَ مساحة هذا الملعب؟ .

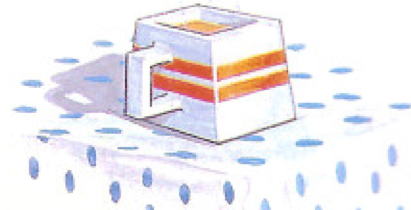
الكيلومتر المربّع (كم٢) والميلُ المربّعُ يستعملُها الجغرافيّون في قياسِ مساحاتِ الجُزُر .

الهكتار (مربّعٌ طولُه 100 م وعرضُه 100 م) والفدّان (4840 ياردة مربّعة) يُستعملان لتقدير مساحاتِ المزارع .

الـدوائـر :







هل جرّبت أن تشرب من كوبٍ مربّع الشّكل؟.

أو أنْ تسوقَ دراجةً عجلتُها مسدّسةُ الأضلاع؟.

أو أن تستعملَ هاتفاً قرصُه مثلّثُ الشّكل؟.



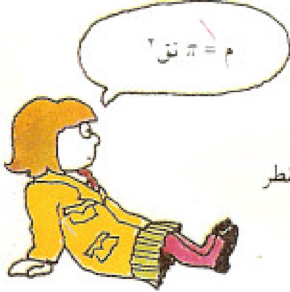
إنّ الدائرةَ شكلٌ خاصّ : ليس لها رؤوسٌ ولا زوايا على إطارِها (ويسمى المحيط) . ولهذا فائدةٌ عمليةٌ كبيرةٌ لا تَخْفَى . وهي تمكّننا من إيجادِ قاعدةٍ لحساب محيطِ الدائرةِ ومِساحتِها .

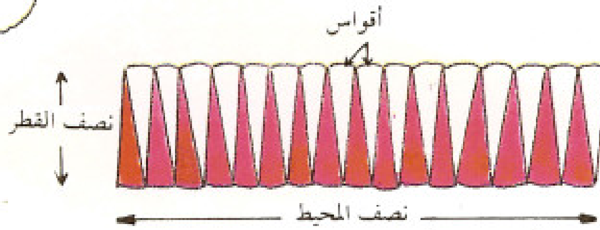
قياسُ الدّائرة :

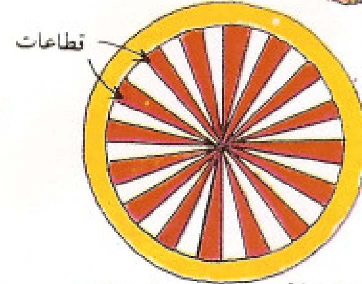
من قرونٍ بعيدةٍ عَرَفَ الناسُ أنه عندما يَدُورُ الدولابُ على الأرض دورةً كاملة، يقطعُ إلى الأمام مسافةً تزيدُ على ثلاثةِ أمثالِ قُطْرِه .

المحيط = π ق أو 2 π نق

إن المحيط هو في الواقع 3.14 مرة قدرَ القُطرِ تقريباً . وهذا العددُ لا يمكنُ أن يكتبَ بالدِّقة، ولكنْ لأهميته أعطيَ اسماً خاصاً، نسمّيه النسبةَ التقريبيةَ ونرمزُ له بالحرفِ اليوناني π، ويُقرأ پاي . فلإيجادِ محيطِ الدائرة، اضربْ قُطرَها في 3.14.







إذا جزّأت الدائرة إلى قطاعاتٍ صغيرةٍ يمكنُك ترتيبُ هذه القطاعاتِ بعضِها بجوارِ بعض، بحيث تكوّنُ ما يقاربُ المُستطيل . وفي هذا المستطيل يكون نصفُ الأقواسِ في الأعلى ونصفُها في الأسفل .

ويكونُ عرضُ المستطيل هو نصفُ القُطرِ تقريباً، وطولُه يقاربُ نصفَ المحيط . فمِساحةُ الدائرةِ إذن π نق × نق = π نق² .

محيط الدائرة

القوس

الشّعاع

قطر الدائرة

أشكالٌ دائريّة:

المخروطُ والأسطوانةُ والكُرَةُ كلُّها ذاتُ سطوحٍ منحنية. فإذا قطعت أياً منها عَرْضياً على خطٍّ يوازي القاعدةَ تجِدُ دائرة.

دائرة: أي شريحة توازي القاعدة،

قطع ناقص: أي شريحة بين الدائرة والقطع المكافىء.

قطعٌ مكافىء: إذا قطع المخروط قطعاً موازياً لحافته المائلة يكون هذا المقطع قطعاً مكافئاً.

قطعٌ زائد: هو مقطع على زاوية أكبر من زاوية ميل المخروط.

مخروط

أسطوانة

كرة

كيف تقطعُ المخروط بحيث ينتجُ مثلثاً؟

كانت هيباشيا رياضيةً إغريقيةً مشهورة، عاشت في الإسكندرية حوالي سنة 400 م. وقد قضتْ ساعاتٍ طويلةً تدرسُ الخطوطَ المتحنيةَ الناتجةَ من قَطعِ المخروط.

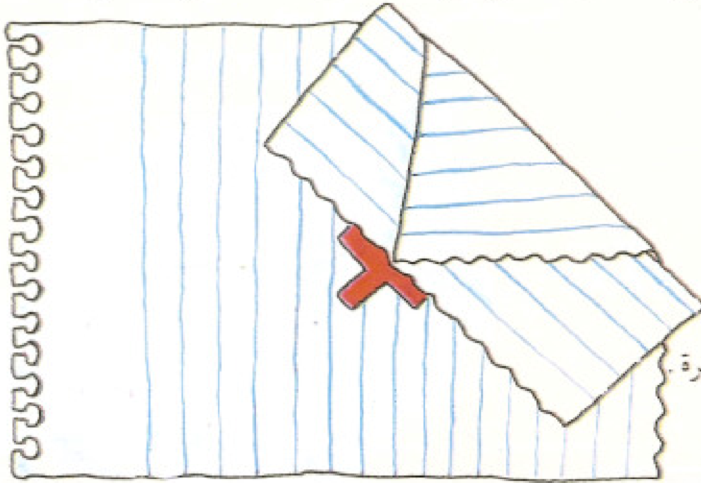
رسمُ الدائرة بخطوطٍ مستقيمة:

1 ـ قُصَّ شريحة ورق عريضة من أحدِ طرفي ورقة، وضَعْ خطَّين مُتصالبين عند منتصفِ الصفحةِ الكبيرةِ من الورقة.

2 ـ ضع شريحة الورق بحيث تلامس أحد الخطَّين المتصالبين، ثم اطْوِ عليها حافةَ الصفحةِ الكبيرة.

3 ـ كرِّرْ هذا حوالي 20 مرة، جاعلاً شريحة الورق على زوايا مختلفة.

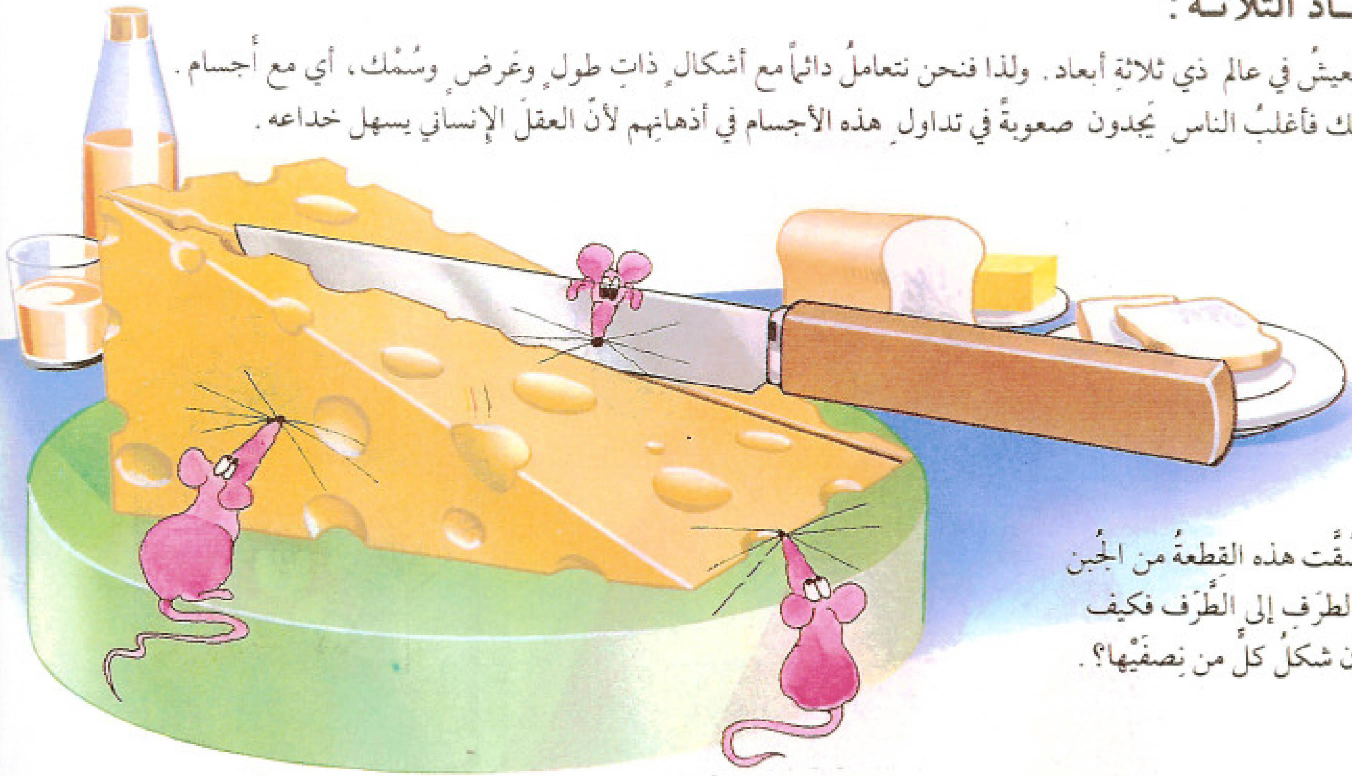
اكتشفت هيباشيا أنه يُمكِنُ قطعُ المخروطِ لصُنعِ ثلاثةِ مُنْحنياتٍ مُختلفة، عدا الدائرة، وهذه المنحنيات، كالدائرة، لها قواعدُ خاصةٌ بها.



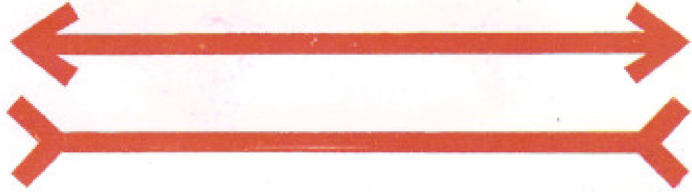


الأبعادُ الثّلاثة :

نحن نعيشُ في عالمِ ذي ثلاثةِ أبعاد . ولذا فنحن نتعاملُ دائماً مع أشكالٍ ذاتِ طولٍ وعَرضٍ وسُمْك ، أي مع أجسام . ومع ذلك فأغلبُ الناسِ يَجدون صعوبةً في تداولِ هذه الأجسام في أذهانِهم لأنّ العقلَ الإنساني يسهل خداعه .



إذا شُقّت هذه القِطعةُ من الجُبن من الطرَفِ إلى الطَّرَف فكيف يكون شكلُ كلٍّ من نِصفَيْها؟ .

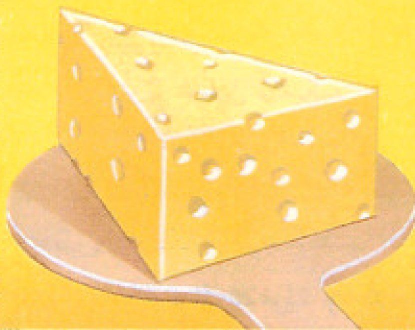


هذان الخطان : هل هما مُتساويان في الطّول؟ قِسْ طولَ كلٍّ منهما واحكمْ بنفسِك .

المتعـددة السطـوح :

ظلَّ الرياضيون قروناً كثيرةً يَبحثون عن خصائص أجسامٍ كثيرة . إن أسهل هذه الأجسام دَرْساً وتصنيفاً هي الأجسام الصلبة وتدعى المتعددة السّطوح .

خذْ أيَّ جِسْمٍ ذي سطوحٍ منبسطة . كم سطحاً تَجدُ له؟ كم حافةً؟ كم رُكْناً؟ .



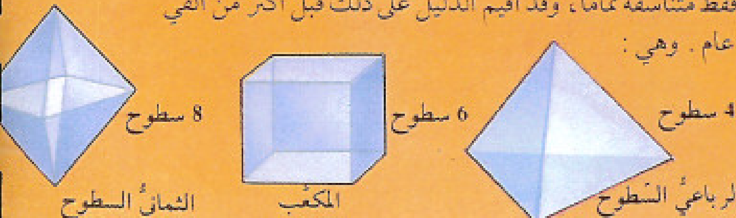
هذه القطعة من الجُبن 5 سطوح و 6 أركان و 9 حافات



في القرنِ الثامنَ عشرَ اكتشفوا أن مجموعَ السّطوح + الرؤوس - الحافات هو دائماً 2 .

متعددة السطوح المتناسقة :

رغم أن الأجسامَ المتعدّدة تتخذُ جميعَ الأشكالِ والحجوم ، إلاّ أن هناك خمسة أجسام فقط متناسقة تماماً ، وقد أقيم الدليل على ذلك قبل أكثر من ألفي عام . وهي :

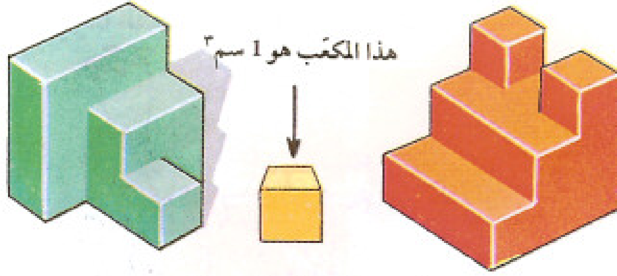


تقديرُ الحجوم:

كما أنّ من الصعب تصوّرَ الأشياءِ ذاتِ الأبعادِ الثّلاثة، فكذلك يصعُبُ تقديرُ الحيِّز الذي تشغَلُه. ولكنّ الرياضياتِ تساعدُنا في تقديرِ ذلك بدقّة.



والمقدار الذي يشغَلُه الجسمُ هو حَجمُ الجسم. أمّا الأجسام الصغيرة فتُقاس حجومُها بالسنتيمتر المكعّب أو البوصةِ المكعّبة، والسنتيمتر المكعّبُ الواحد هو 1 سم × 1 سم × 1 سم أو 1 سم^3.

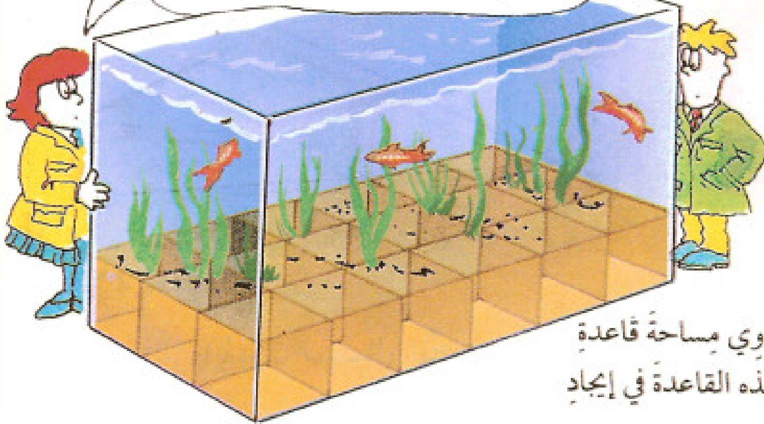


كم سم^3 في هذين الجسمين؟.

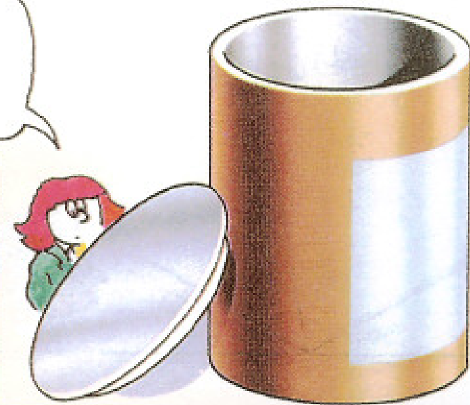
هذا الحوض متوازي المُستطيلات (جسم مستطيل)، تستطيع تقديرَ حجمِه باستعمالِ القاعدة:

ح = ل × ض × ع

(الحجم = الطول × العرض × الارتفاع).



ونُعبّر عن ذلك بطريقةٍ أخرى، فنقول إن الحجمَ يساوي مساحةَ قاعدةِ الشكل مضروبةً في ارتفاعِه. ويمكنُك أن تستعملَ هذه القاعدةَ في إيجادِ حجمِ أي جسمٍ مَقطعُه العَرْضيُّ ثابت.

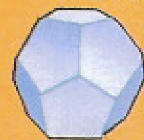




مكعباتُ البناء:

ستةُ أزواجٍ من هذه الأجسام تَبني ستةَ مُكعبات، فأيُّ المربّعاتِ يبقى؟.

لكلٍّ واحدٍ من هذه الأجسام نفس الوجه بنفس الشكل وحافاته متساوية الطول، وأركانه متساوية الزّوايا.



الاثنا عشريّ السطوح

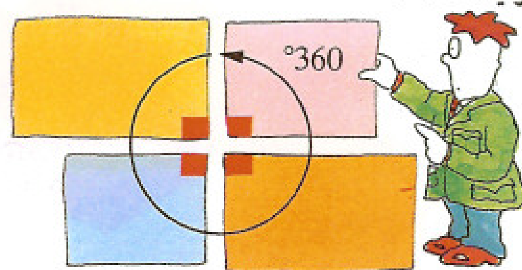


العشروني السطوح

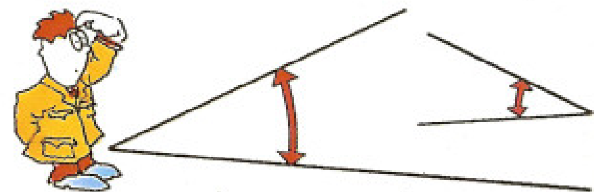
الـزوايـا :

أكثرُ الناس يَعتبرون أنّ الزاوية ركنٌ محصورٌ بين مُستقيمين . إلا أن الزّوايا كثيراً ما تكونُ وصفاً لدورانات ما ، كشجرة سقطتْ على الأرض ، أو مِفتاحٍ دارَ في قُفْله دورةً أو بعض دَورة . إننا نستطيعُ أن نقيس مقدارَ الزّاوية ، أي كم درجةً يبلغُ الدَّوران (ورمز الدرجة هو °) . ويكون ذلك باستعمالِ المِنْقَلة* .

الزّوايا القائمة :

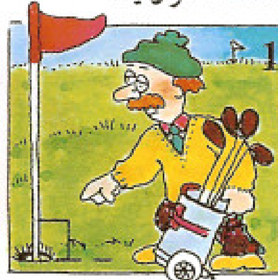


أركانُ المربَّعاتِ والمستطيلات هي زَوايا خاصةٌ . تسمّى زوايا قائمة . الدورةُ الكاملةُ °360 ، وأربعُ زوايا قائمة تساوي دورة كاملة ، فالزاوية القائمة °90 .

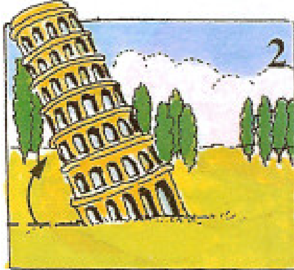


كلُّ من هاتين الزّاويتين °30 . فطولُ ذراعِ الزاويةِ لا يغيِّرُ في مقدارِ الدوران .

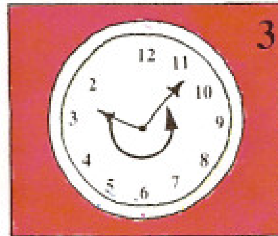
أسمـاء الزوايا :



يُشارُ إلى الزاويةِ القائمة عادةً بعلامةٍ عند رُكنها .



الزوايا التي تقلُّ عن °90 تسمّى حادّة .



الزوايا المنعكسةُ هي التي تزيدُ على °180 .

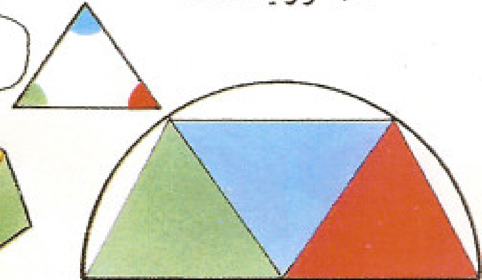


الزوايا المنفرجةُ هي التي تكونُ بين °90 و °180 .

تقديرُ الزوايا دونَ استعمالِ المِنْقَلة :

كثيراً ما يمكنُك أن تعرفَ مقدارَ الزاويةِ بالمَنْطق ، لا بالقِياس . والمنطقُ يؤدِّي إلى وضعِ مبادىءَ نُسمِّيها نظريات . والنظرية قاعدةٌ رياضيةٌ يمكنُ أن نبرهنَ على صحّتِها . وإليك بعضَ النظريات المتعلقةِ بالزّوايا .

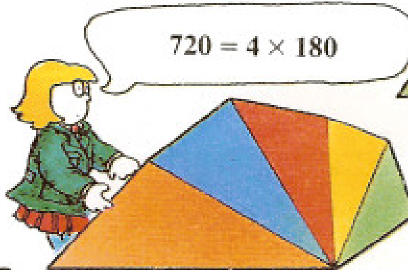
1 . زوايا المثلّث



قُصَّ أركانَ المثلّثَ وضعْ بعضَها بجوارِ بعض تتكوّنْ معك نصفُ دائرة . وهذا معناه أنّ زوايا المثلّث °180 .

ولأن هذا ينطبقُ على كلِّ مثلث فإن كثيراً من النظرياتِ الهندسيةِ تُبنَى عليه .

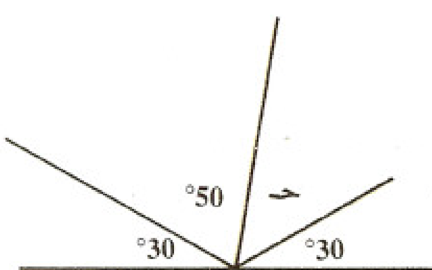
2 . الزوايا الداخلةِ في المضلّع



لأنّ كلَّ مضلّعٍ يمكن تقسيمُه إلى عددٍ من المثلّثات ، فتستطيع دائماً أن تحسُبَ مجموعَ زوايا المضلّع .

فالسُّداسيُّ مثلاً يتألفُ من أربعةِ مثلّثات ، ومجموع زواياه °720 . فكم درجة كلِّ زاويةٍ في المضلّعِ السّداسيِّ المتماثل**؟ .

3 . الزوايا على الخطِّ المستقيم



عندما تُكوِّنُ الزوايا فيما بينها خطاً مستقيماً ، يمكن أنها تُكوِّنَ بعضُها مع بعض نصفَ دائرة . فمجموعُ الزوايا على الخطِّ المستقيم °180 .

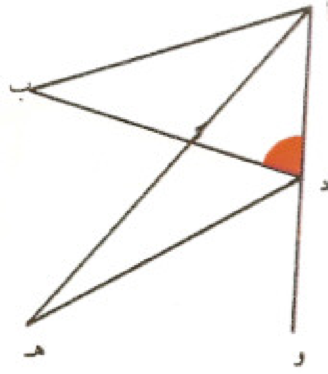
فإذا كانت إحدَى هذه الزوايا مجهولة ، يمكن أن نجدها بالحساب . جِدْ مقدارَ الزاويةِ حـ في الشكل .

* في صفحة 37 طريقةُ استعمال المِنْقلة .

** في صفحة 12 مزيد عن الأشكال المتماثلة .

نظريات أخرى عن الزوايا :

نقدمُ لك هنا نظريتين أُخريَيْن تتعلّقان بالزوايا . ولأن كُلًّا منهما تتعلّق بأكثرَ من زاوية فلا بدّ من تسمية الزوايا . وتوضعُ عادةً إشارةٌ للزاويةِ فوقَ الحرفِ الذي يُسمّيها، فنكتبُ بْ ، هْـ ، أو نكتب لـب، لـهـ .
في الصورةِ اليمنى ثلاثُ زوايا تَلتقي عند د، ويمكنُك أن تحددَ كلًّا منها بتسميةِ الخطّين اللذين يُكوّنانها .





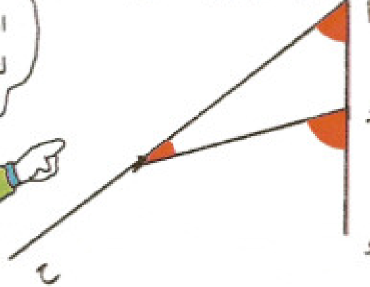
نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس :

هل يمكنُك أن تثبت أن أ حْ ب = د حْ هـ

الزوايا المتقابلة دائماً متساوية :

البرهان :
عندما يَتقاطع خَطّان يَكونُ مجموعُ الزوايا الأربع 360° :
أ حْ د + أ حْ ب = 180° لأنّ د حـ ب خَطٌّ مستقيم .
هـ حـ ب + ا حْ ب = 180° لأنّ أ حـ ب هو أيضاً خطٌّ مستقيم .
ولـذا أ حْ د = هـ حْ ب .

نظرية الزوايا الخارجة :

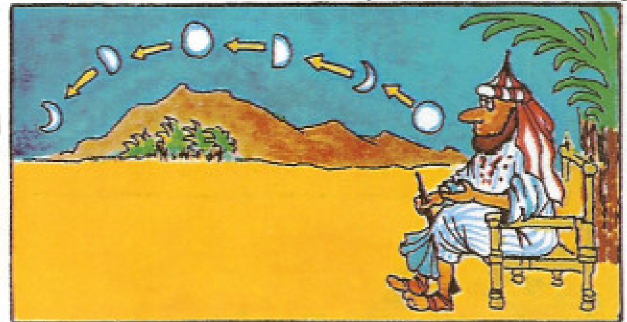




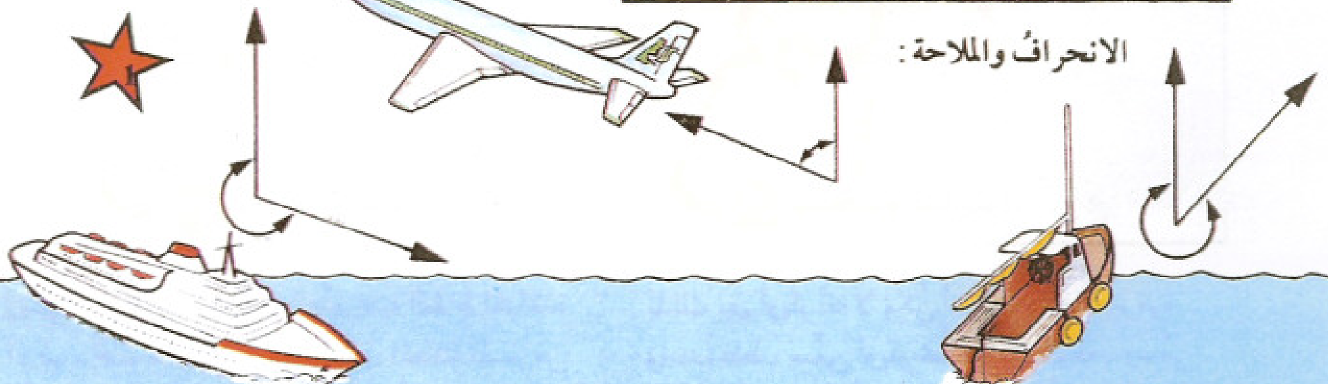
الزاويةُ الخارجة (مثل و دْ ح) تساوي زَاويتي المثلّثِ اللّتين تُقابلانها (أْ ، هْـ) .
البرهان :
أْ + هْـ + دْ = 180° لأنّ الزوايا الثلاثَ تشكلُ مثلّثاً .
و دْ هـ + أ دْ هـ = 180° لأنّهما تُكوِّنان خطاً مستقيماً أ د و .
فيكون أْ + هْـ = و دْ هـ .

قياس الزوايا بالدّرجات :

كان البابليون أقدمَ الفلكيين في التاريخ . وكانوا يُقسّمون السنة إلى 12 شهراً قمرياً ، طولُ كلِّ شهر 30 يوماً . فكانوا يعتبرون السنةَ 360 يوماً . وربما كان هذا هو السببُ في أنهم قَسموا الزّاويةَ إلى 360 درجة . وها نحن بعدَ 4000 سنة ما زلنا نستعملُ الدرجات لقياسِ الزّوايا والاتّجاهات .

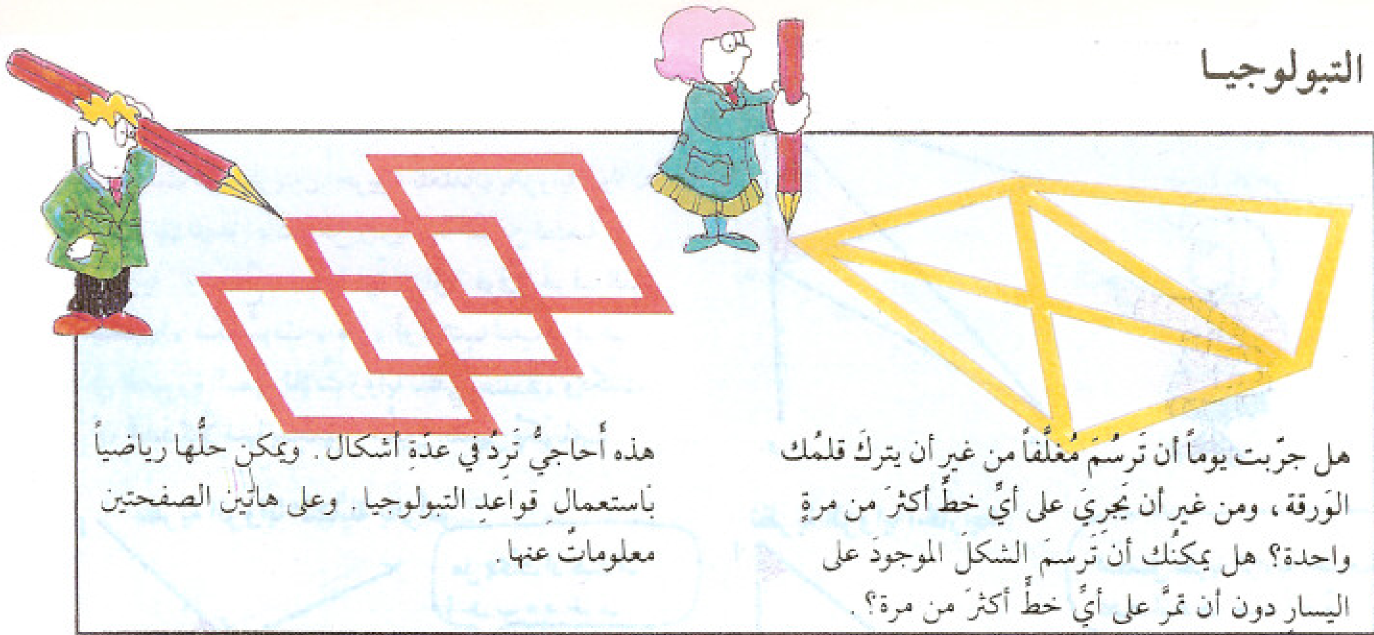


الانحرافُ والملاحة :



البواخرُ والطائراتُ تُحددُ خطَّ سيرِها بالانحراف . والانحرافُ هو زاويةٌ تقاسُ بَدْءاً من خطِّ الشَّمال وباتجاهِ عَقرب الساعة، فالطائرةُ والباخرةُ والمدمِّرَةُ تسيرُ بانحرافاتٍ قدرُها 68° و 317° و 251° ، عيِّنِ انحرافَ كلٍّ منها .

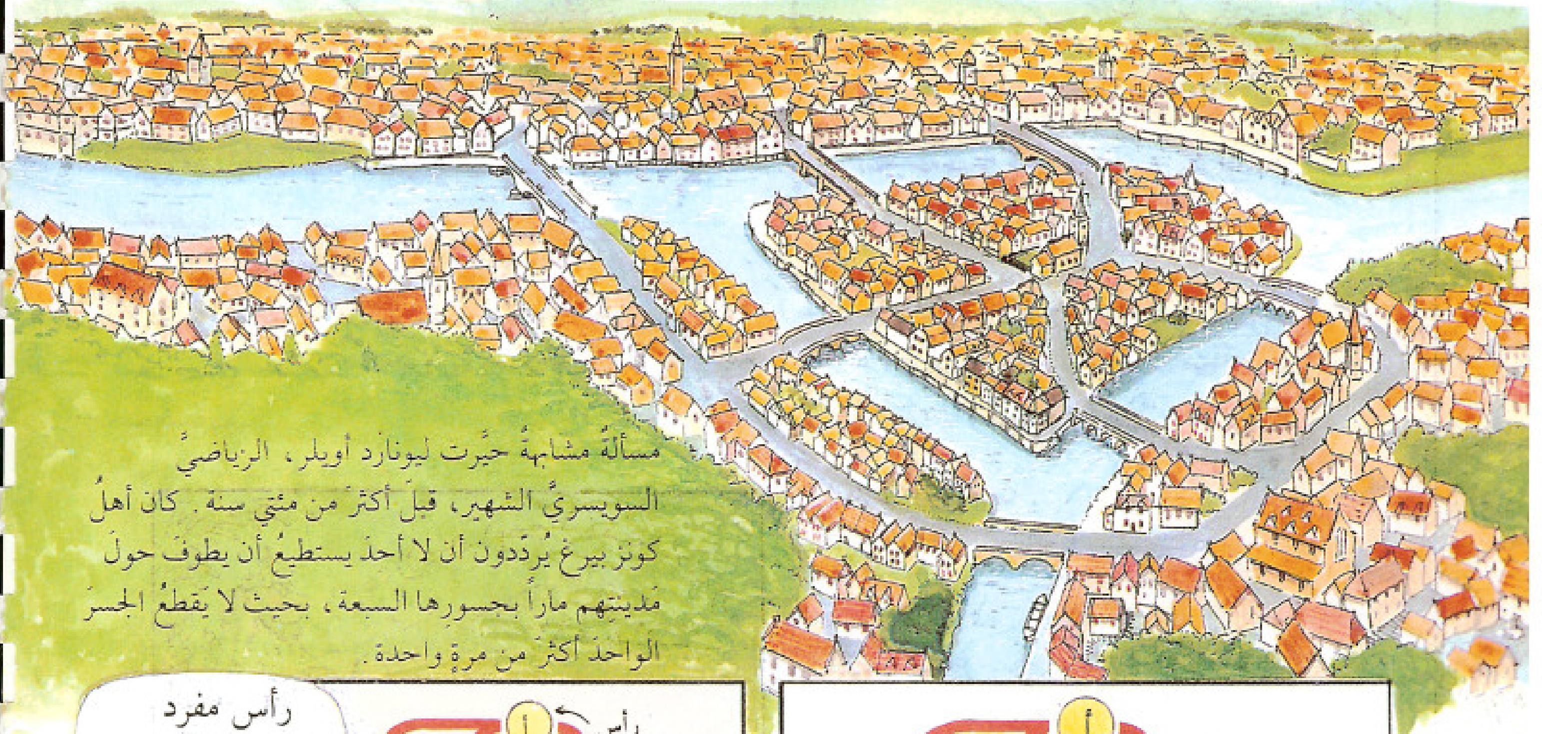
التبولوجيا



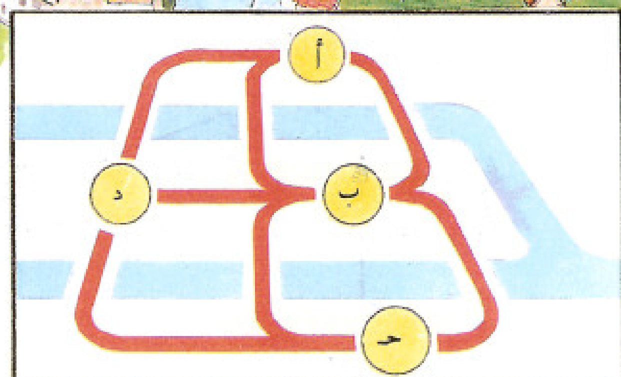
هل جرّبت يوماً أن ترسُمَ مُغلقاً من غيرِ أن يتركَ قلمُك الوَرقة، ومن غيرِ أن يَجريَ على أيِّ خطٍّ أكثرَ من مرةٍ واحدة؟ هل يمكنُك أن ترسمَ الشكلَ الموجودَ على اليسارِ دون أن تمرَّ على أيِّ خطٍّ أكثرَ من مرة؟.

هذه أحاجيُّ تَرِدُ في عدةِ أشكال. ويمكن حلُّها رياضياً باستعمالِ قواعدِ التبولوجيا. وعلى هاتين الصفحتين معلوماتٌ عنها.

جسور كُونِزْبِيرغ السَّبعة:



مسألةٌ مشابهةٌ حيّرت ليونارد أويلر، الرياضيَّ السويسريَّ الشهير، قبلَ أكثرَ من مئتي سنة. كان أهلُ كونِزبيرغ يُردّدون أن لا أحدَ يستطيعُ أن يطوفَ حولَ مدينتِهم ماراً بجسورها السبعة، بحيث لا يقطعُ الجسرَ الواحدَ أكثرَ من مرةٍ واحدة.

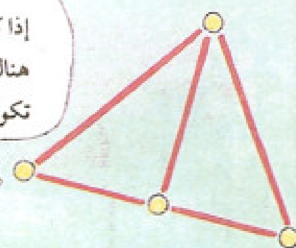


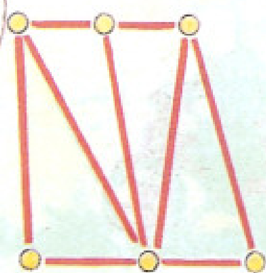


رسم أويلر مُخططاً للمدينة وحدّد عليه النقاطَ المتباعدة أ، ب، حـ، د. ثم عيّنَ كلَّ الطرقِ الممكنةِ للسيرِ من أيٍّ من هذه النقطِ إلى الأخرى مروراً بالجسور، وذلك بالتخطيطِ على الورقةِ بقلمِ الرصاص.

بذلك بيّنَ أويلر أنه لا يمكنُ أن تَقطعَ كلَّ جسرٍ مرةً واحدةً فقط. سمّى أويلر مخطّطَه هذا شَبكة. وسمّى النقطَ الأربعَ رُؤوساً، والخطوطَ أقواساً. فإذا أمكنَ رسمُ الشبكةِ بالمرورِ على كلِّ قوسٍ مرةً واحدةً فقط، تُسمّى تلك الشبكةُ عبّارة أو سالكة.

فهمُ الشبكات:





عندما كان أويلر يتلمَّسُ الحلّ، اكتشفَ أن ليس من الضروريّ أن يرسمَ الشبكةَ كي يعرفُ إذا كانت عبَّارةً أم لا. فالأمرُ يعتمدُ على عددِ الرؤوسِ الزوجيةِ والفرديّةِ فيها.

يسمَّى الرأسُ فردياً إذا كان يَلتقي عنده عددٌ فرديٌّ من الأقواس. ويسمَّى زَوجياً إذا كان يلتقي عنده عددٌ زوجيٌّ من الأقواس.

التبولوجيا في حياتِنا اليومية:

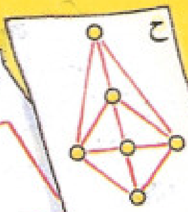
كانت اكتشافاتُ أويلر ذاتَ أهميةٍ بالغة، لأنها تساعدُ في حلِّ مسائلَ مختلفة. كانت هي نقطةَ البداية لموضوع في الرياضياتِ يسمَّى التبولوجيا. ومن فوائد التبولوجيا الكبرى أنها تساعدُ في وضعِ تخطيطات لطرق السيارات وتقاطعاتها. فمثلاً في مفترقِ طُرقٍ مزدحمٍ كهذا يَنبغي أن يكونَ بإمكانِ السيارةِ أن تغيرَ اتجاهَها من غيرِ أن تجتازَ طريقاً آخر.

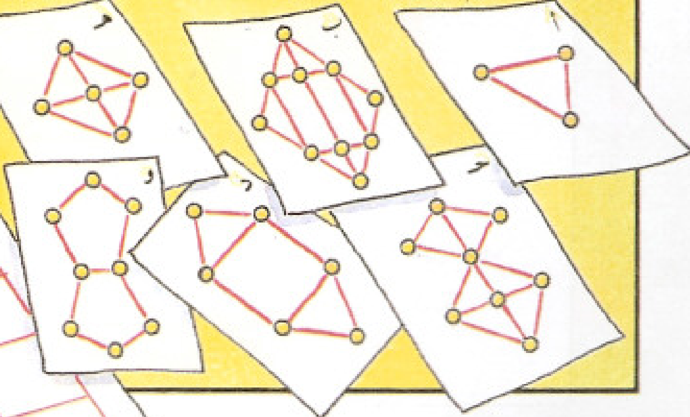
أحجيةٌ في الشبكات:

3

أرسمْ مجموعةَ شبكاتٍ كهذه، ثم املأ الجدول بأعداد الرؤوس الفرديةِ والزوجيةِ في كلِّ شبكة. أيُّ هذه الشبكاتِ سالكة؟

أيمكنُ أن ترسم شبكةً فيها رأسٌ واحد فردي؟





	عدد الرؤوس الزوجية	عدد الرؤوس الفردية	عبَّارة نعم/لا
A	3	0	نعم

الكسـور :





نستعملُ الكسورَ كثيراً في أحاديثنا عن غيرِ قصد . ومن السهلِ إدراكُ قيمةِ الكسرِ لأنه يقارَنُ بالواحدِ الصحيح .

هذا $\frac{1}{5}$ الكعكة لأنّها تتكوّنُ من خمسِ قطعٍ مثلِه .

تقديرُ الكسـور :

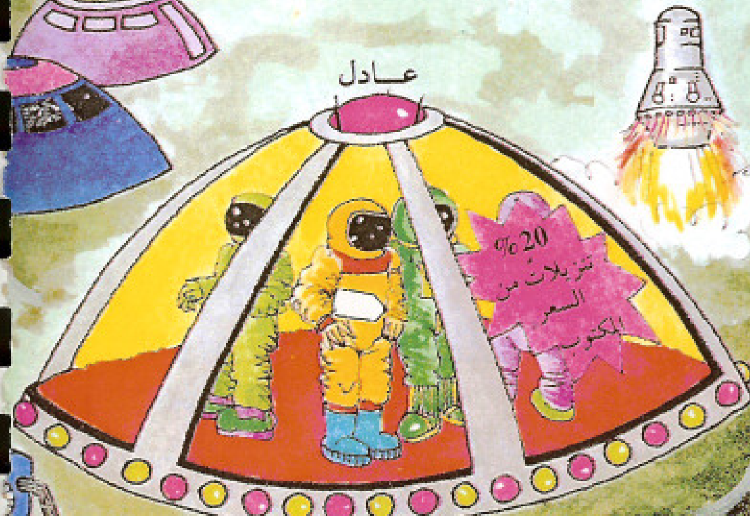
يتركبُ كُلّ كسرٍ من جُزْأين : البسطُ والمَقام .

كلّما كبر المقام كلّما صَغُرت القِطع .



النسبة المئوية :

النسبةُ المئويةُ كسرٌ مَقامُه 100 . هل تستطيعُ أن تحْسُبَ النسبَ المئويةَ في هذه القِصّة؟ قضى هاشم أسبوعاً يحْرُث . وها هو قد قبضَ أجرَه ونَزَلَ إلى المدينة ليرى كيف يُنفِقُ نقوده . وأول وقفة كانت له عند المصْرِف .





يعطيه المصرف $\frac{10}{100}$ أي $\frac{1}{10}$ نقودِه ربحاً له إذا هو أودعَ نقوداً فيه .

فلكي يحسبَ ما يأخذُ من فائدةٍ على مبلغِ 120 ليرة بعد سنةٍ يضربُ 120 في $\frac{10}{100}$.

1 . ما الفائدةُ التي يحْصُلُ عليها بعدَ سنةٍ؟ .

2 . كم يصيرُ مجموعُ مالِه في المصرف بعدَ سنتين؟ .

ثم وقف هاشم عند محلّ عادل لبيعِ الثياب . فوجده ينزل من السعرِ المكتوب ما مقدارُه 20% أي الخمس ($\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$) .

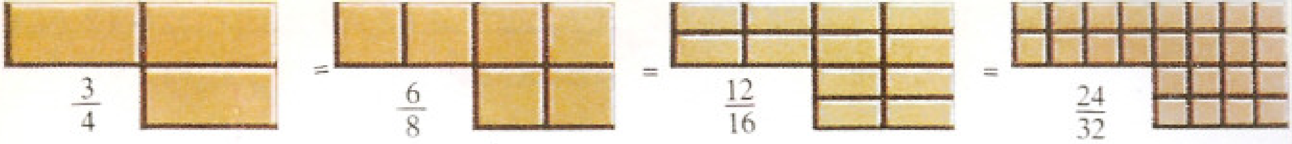
وأعجبته بزّة الفضاء ، فقدَّر أن التنزيل $240 \times \frac{1}{5}$.

3 . فكم يبلُغ التنزيل؟ .

يستطيعُ أن يطرحَ هذا من 240 فيحصلَ على الثمنِ ولكنْ أسرعُ من ذلك أن يحْسُبَ 80% رأساً .

4 . ما قيمةُ $240 \times 80\%$ ؟ .

تبسيطُ الكسور:



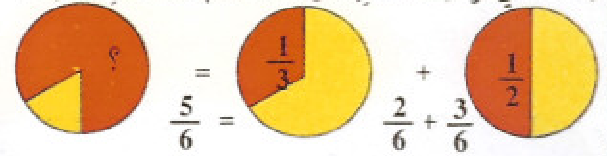
$\frac{24}{32} = \frac{12}{16} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

كثيراً ما نجدُ من المناسبِ تغييرَ مقامِ الكسرِ لتسهيلِ الحساب.

يمكنُ تبسيطُ الكسرِ بضربِ بسطهِ ومقامهِ بعددٍ واحد، أو قسمتِها على عددٍ واحد.

جمعُ الكسور

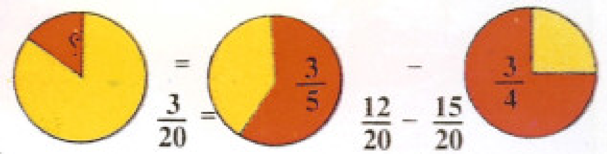
لجمعِ الكسور ابدأ بتغييرِها حتى تكونَ من جنسٍ واحد، أي توحيدِ مقاماتِها، وذلك حسبَ القاعدةِ السابقة.



$\frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$

هنا نجد أن $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{4}$ يمكن أن يحوَّلا إلى أسْداس.

تذكَّرْ أن تضربَ البسطَ بما تضربُ فيه المقام.



$\frac{15}{20} - \frac{12}{20} = \frac{3}{20}$

هذه الكسورُ تُحَوَّلُ إلى أجزاءٍ من عشرين.

نصفُ النِّصف:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

قد تحسُبُ أن الضربَ يُكبِّرُ النَّتيجة. هذا لا يصحُّ إذا كان الضربُ في كَسْر



لضربِ كسرٍ في كسر، اضربْ البَسْطين ثم اضربِ المَقامين، ثم بسِّط الناتج.

صمم هاشم الآن أن يتناولَ غَداءَه. وعند دفعِ الحساب عليه أن يدفعَ ثمنَ الطعامِ مُضافاً إليه 10٪ للخادم و 15٪ من المجموع لصاحبِ المطعم. ويقدمُ صاحبُ المطعم كشفاً ويقدمُ الخادم كشفاً، ومجموعُهما هو ما على هاشم أن يدفعَه.

يفضلُ الخادمُ أن يضافَ كشفُ حسابه بعد كشفِ حسابِ صاحب المطعم، ويُلحُّ صاحبُ المطعمِ أن يكونَ كشفُه هو الأخيرَ هل تعرفُ السَّببَ؟.

مَقْهى ومطعم

كشفُ حساب	
26.00	
2.60	+ 10٪ خدمة
28.60	
4.29	+ 15٪
32.89	المجموع

كشفُ حساب	
26.00	
3.90	+ 15٪
29.90	
2.99	+ 10٪ خدمة
31.89	المجموع

النسبةُ والتناسب :

النسبةُ تعبيرٌ يتضمنُ معنى الكسر . والتناسبُ يتضمن تساوي نسبتين . فإذا ملأت دَورقاً بعصير البرتقال ووضعت فيه كوبين من العصير المركّز وخمسةَ أكواب من الماء، تكون نسبةُ العصير إلى الماء 2 إلى 5، وتكتب 2:5 . ويمكنُك أن تزيدَ أو تُنقصَ الماءَ والعصيرَ مع بقاءِ التناسب ثابتاً .



تستطيعُ أن تملأ دورقين بأربعة أكواب من البرتقال، وعشرة من الماء.

أو تملأ نصفَ دورق بكوبٍ من البرتقال وكوبين ونصفٍ من الماء .

هنالك عشرُ حصص
1 + 3 + 5 .

كلُّ حصة
180 ÷ 10 = 18 كيساً .

1 ـ احسُبْ مجموعَ الحصص؟
2 ـ احسُبْ قيمةَ كلِّ حصة؟
3 ـ احسُبْ كم ينالُ كلُّ واحد؟

نصيبُ رائف 5 × 18 = 90 كيساً،
ونصيبُ آمنة 3 × 18 = 54 كيساً،
ونصيبي 2 × 18 = 36 كيساً .

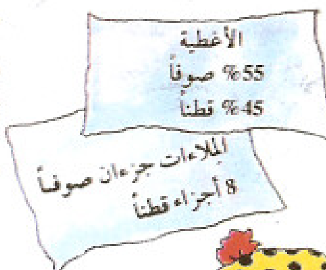
أكملت آمنةُ ورائف ومحمودٌ قطفَ الزيتون فجمعوا 180 كيساً، ويُريدون أن يقتسموها بالعدل . ولأنّ رائفاً كان هو المسؤول الأول، فكان لا بدّ من إعطائِه النصيبَ الأكبر.

وتقولُ آمنة إن محموداً صغير وإن نصيبَها يجبُ أن يكونَ أكبرَ من نصيبه . لذا وافقوا على أنْ يتقاسموا الزيتونَ بنسبةِ 5:3:2 . فكان لا بدَّ من العملِ بالخطواتِ الثلاثِ المبيّنةِ أعلاه .

مقارنةُ النِّسب :

أي قُماش أكثر صوفاً؟

قد يكونُ أسهل لك مقارنة هاتين النسبتين إذا وضعت 55:45 بالصورة 11:9 .



هذا يَعني أن الأغطية فيها 11 جزءاً من الصوف، من كلِّ 20 جزءاً من القُماش . والملاءات فيها 4 أجزاء صوفاً في كل 20 جزءاً . والأغطية أكثرُ صوفاً .



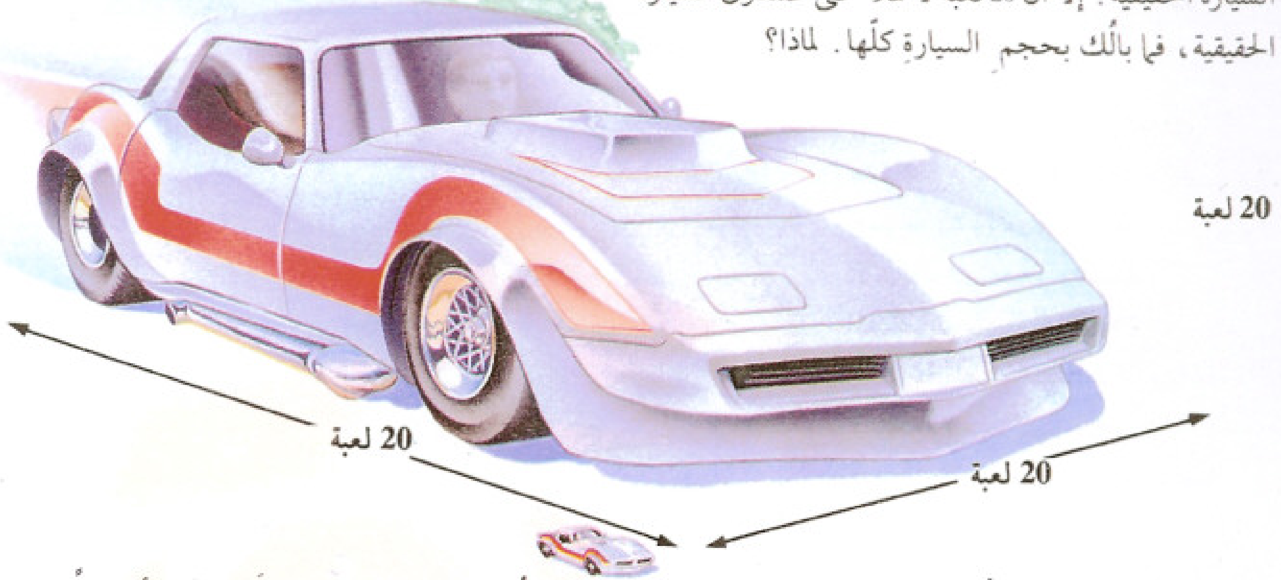
تُستعملُ النسبُ أيضاً في الرّهان على الخيل . تدفعُ قرشاً في الرّهان على رعد فإذا سبق تأخذ خمسة قروش . ماذا تأخذُ إذا دفعت قرشاً في الرهان على الصاروخ وربح؟ .



هذه الخريطة بمقياس رسم 1:25000 ، وهذا يعني أن 1سم . (أو بوصة) على الخريطة يمثّل ٢٥٠٠٠ سم (أو ٢٥٠٠٠ بوصة) على الطبيعة . ماذا يمثّل المليمتر الواحد على هذه الخريطة؟ .

النسبُ والحجوم:

صُنعت لعب للأطفال على شكل سيارة، ولكن بنسبة 20:1 من حجم السيارة الحقيقية. إلّا أن 20 لعبة لا تملأ حتى صندوق السيارة الحقيقية، فما بالُك بحجم السيارةِ كلّها. لماذا؟



السبب أن نسبة 20:1 تعني أن الطول هو 20:1 من الطولِ الحقيقي، وإنّ العرض هو 20:1 من العرض، والارتفاعَ 20:1 من الارتفاع.

فنحتاجُ إلى 20 × 20 × 20 سيارةَ لعبة لنملأ حجماً يساوي حجم السيارة الحقيقية. فالواقعُ أن النسبة بين الحجمين هي 8000:1.

ألغاز:

الزجاجةُ أ تسعُ لتراً من الزيت. والزجاجة ب تسع لترين. لماذا لا يكون ارتفاعُ ب ضعفَ ارتفاعِ أ؟.



إذا كنا نحتاجُ إلى 50 قرصاً من البسكوت لملء هذا الوعاء، فهل نحتاجُ إلى 100 قرص لملء وعاءٍ مماثلٍ ولكنْ ضعفَ حجمِه؟



1

النسبُ المُثلّثية:

كان المصريون القدماءُ يستعملون في بناءِ الأهرام حبلاً من 12 قسماً متساوية، معقود بعضها ببعض، فإذا شُدّ الحبلُ على شكلِ مثلثٍ أضلاعُه بنسبة 5:4:3 تكون دائماً الزاويةُ المقابلةُ للضلعِ الأكبرِ قائمة. يُفسّر ذلك أشهرَ نظرياتِ الرياضياتِ وتسمّى نظرية فيثاغورس.

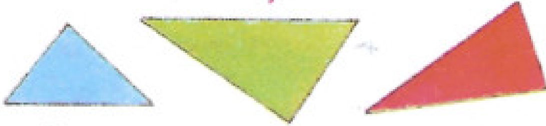


نظرية فيثاغورس:



فيثاغورس رياضيٌّ إغريقي مشهور. اكتشفَ أنه إذا كان المثلثُ قائمَ الزاوية وكانت أضلاعُه أ، ب، جـ، كان جـ^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}.





ترى أعلاه النسب بين أضلاع ثلاثة مثلثات مختلفة. واحد منها فقط قائم الزاوية. أيّها؟ استعمل نظرية فيثاغورس لإيجاد الجواب.

المجموعـــات :

في كثيرٍ من حقولِ الرياضيات نحتاجُ إلى وضعِ الأعداد والأشكال في مجموعات . وقد وجد الرياضيون أن مما يساعدُ على دراسة هذه المجموعات استعمالَ الرموزِ التالية :

فهذه الأشكالُ يمكن أن توضعَ في عدةِ مجموعات مختلفة ، كأن نأخذَ مجموعة المثلثات ، ومجموعةَ الأشكال الرباعية ، ومجموعةَ المضلعات المتساوية الأضلاع ، ومجموعةَ المضلّعات ذاتِ الزوايا القائمة . وهذه كلُّها عناصرُ في مجموعةِ المضلعات التي نسميها هنا ض .

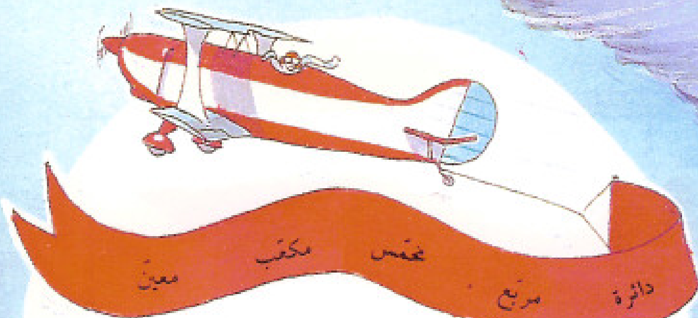
فإذا كانت أ مجموعة الأشكال المتساوية الأضلاع ، فإن
أ = { ب ، د ، ك } .

وإذا كانت ب مجموعةَ الأشكال التي فيها زاويةٌ قائمة فإن
ب = { أ ، د ، و ، ط } .

لغةُ المجموعات :

∈ ينتمي إلى
⊂ مجموعةٌ جُزئية من
أ المجموعة أ
أَ مجموعةُ العناصر التي ليست في أ
∅ المجموعةُ الخالية
∩ التقاطع (و)
∪ الاتحادُ (أو)
ع عددُ العناصر في :

هل يمكنُك أن تُعرِّفَ المجموعتين ج و د عندما :
ج = { أ ، ب ، جـ ، ط ، ي } .
ود = { ء ، هـ ، و ، ح ، ي } .
ج ⊂ ض تعني أنّ المجموعة ج جزءٌ (مجموعة جزئية) من مجموعة ض الأكبر .
ب ∈ ج تعني أن ب عنصرٌ من عناصر ج . فإذا كانت ب ∈ ج فـإن ب ∈ ض لأنّ ج مجموعةٌ جزئية من ض .
نستعملُ الرمز ع ليبيّنَ عددَ العناصر
فما ع (أ ∩ ب)؟ .
وماذا عن ع (أ ∪ ب)؟ .



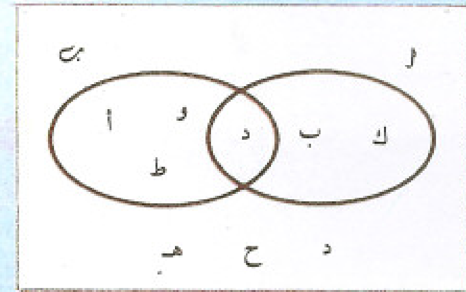
أحدُها شـاذٌ
ما العنصر الشاذُ في هذه المجموعة؟ .





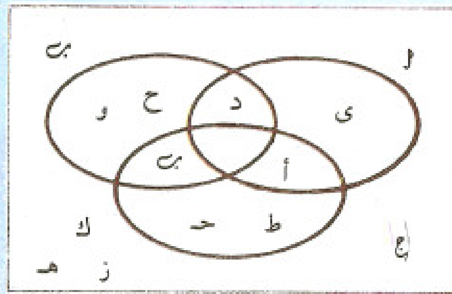
مخططاتُ ڤن :

في المخططِ المرسومِ في الصفحةِ المقابلةِ تتداخلُ بعضُ المجموعاتِ، وذلك لأنّ شكلاً مثل د ينتمي إلى كل من ا، ب، د وفي سنة 1880 ابتكرَ جون ڤن طريقةً سهلةً لبيانِ العَلاقاتِ بين الأشكالِ المختلفة . وهذه الطريقةُ هي ما تسمَّى مُخططَ ڤن .



يبيِّنُ هذا المخططُ المجموعتين ا ، ب . وتقاطعُهما هو ا ∩ ب . لذا فإن د ∈ ا ∩ ب . وكلُّ عنصرٍ ليس في ا ولا في ب يوضعُ خارجَ حَلْقتيهما .





هنا مخططُ ڤن للمجموعات ا ، ب ، ج . وتقاطع الثلاثة هو ا ∩ ب ∩ ج . تحرك الشكل أ ليستقرّ داخل ب و ج وليس داخلَ ا . لذا فإن أ ∈ ا' ∩ ب ∩ ج .
ما العنصرُ الذي يكوِّنُ ا ∩ ب ∩ ج ؟

المصفوفات

	ن ي	ل	ب	م	د	هـ ك
ن ي	0	2	1	0	0	0
ل	2	0	1	1	1	0
ب	1	1	0	0	1	0
م	0	1	0	0	1	1
د	0	1	1	1	0	1
هـ ك	0	0	0	1	1	0

تُحشدُ بعضُ المعلوماتِ عن مجموعاتِ الأعدادِ على شكلِ مصفوفةٍ كهذه لأنها أوضحُ من وضعِ المعلوماتِ في جدولٍ أو في مخطِطِ ڤن . فالمصفوفةُ هذه تبيِّنُ عددَ خطوطِ الطيرانِ المختلفةِ بين بعضِ المطارات . وفي هذا العددِ من المطاراتِ قد تجدُ أن الخريطةَ واضحةٌ بما فيه الكفاية . ولكنْ إذا زادت المعلوماتُ كثيراً تصبحُ طريقةُ المصفوفةِ أكثرَ فائدة .

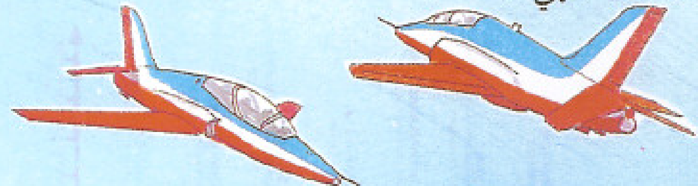
نيويورك
لندن
موسكو
هنغ كنغ
باريس
دلهي

أحجبةُ طيرانٍ :

أرادت سيدةٌ أن تسافرَ جواً من هنغ كنغ إلى نيويورك فلم تجد طريقاً مباشراً . وقد وصفَ لها موظفٌ في المطارِ الطريقَ هـ ك ∩ د ∩ { ل ∪ ب } ∩ ن ي هل يمكنك أن تفسرَ هذا الطريق؟ .

5

عندما لا تنتهي الأعداد :



هذه هي مجموعةُ الأعدادِ الطبيعيةِ ط = { 1، 2، 3، 4، . . . } إنها تحتوي على عددٍ غيرِ متناهٍ من الأعداد .
لذا نكتبُ عـ (ط) = ∞ .

هذه المجموعةُ تحوي أيضاً عدداً غيرَ متناهٍ من الأرقام .
لذا نكتبُ ع (T) = ∞ . لكن T لا تشتملُ على الأعدادِ التسعةِ الأولى فكأن ∞ − 9 = ∞ . وهذا يبدو لنا شبهَ مستحيل حسب منطقِنا . إلا أن منطقَ المجموعاتِ اللامتناهيةِ يغايرُ منطقَنا مع الأعدادِ العاديةِ، وهذا حقلٌ ما يزالُ العلماءُ يدرسونه .

الإحصــاء :

الإحصاء فرع جديد من فروع الرياضيات ، وُضع لتسجيل المعلوماتِ وتسهيلِ التنبؤ عن الأحداث المحتملة . ويجمع الإحصائيون معلوماتهم بتجميعِ البيانات ، كأن يسألوا عدداً من الناس يرونه ممثلاً لجميعِ السكان الذين يدرسون أحوالَهم . وهذا ما يسمّى اتخاذَ العَيّنة . وما يحصلون عليه من أسئلتِهم يسجلونه بطرق شتى ، هذه بعضٌ منها :

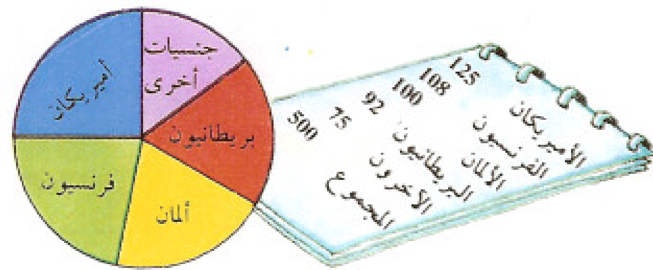
البحث عن منتجع لِقضاء الإجازة :

ليلى موظفة في مكتب سياحة ، وهي تُجري أبحاثاً حولَ منتجعٍ يؤمُّه الناس في إجازاتهم . فتتخذُ عينة من المتجعين وتسألُهم أسئلة مثلَ قولها : ما جنسيّتُك؟ كيف وصلت إلى المنتجع؟ ثم تضعُ البيانات بإحدى الطرقِ الخمسِ التالية :

1. المخطـط الدائـري :

ما جنسيةُ الغالبيةِ العظمى من المنتجعين؟

تقَسَّم هذه الدائرة إلى قطاعات تمثّل النسبَ المئوية للجنسيات .



ولتقدير زاوية كلِّ قطاع تحسُبُ ليلى كم من المجموع تكون كلّ جنسية . فهناك مثلاً 125/500 أي $\frac{1}{4}$ أميريكان فزاويتُهم $\frac{1}{4} \times 360° = 90°$. قدّر الزوايا الأخرى .

2. مخطـطُ المستطيـلات :

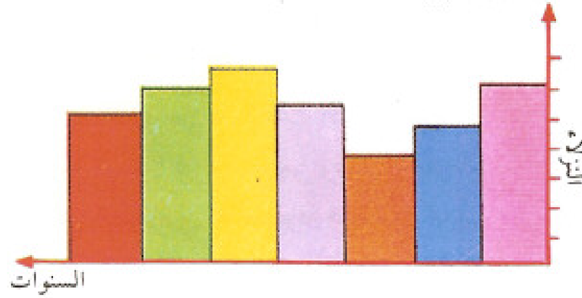
أيُّ طرقِ النقل يستعملُها أكثرُ المتجعين؟ .

الطائرة 52 %	القوارب والقطار 22 %	القوارب والسيارات 20 %	طرق أخرى 6 %

تعرض هذه البيانات في مخططٍ يتكون من مستطيلات ويؤخذ طولُ المستطيل يمثل الطريقة التي تؤخذُ بها الزاوية في المخططِ الدائري .

3. مخططُ الأعمـدة :

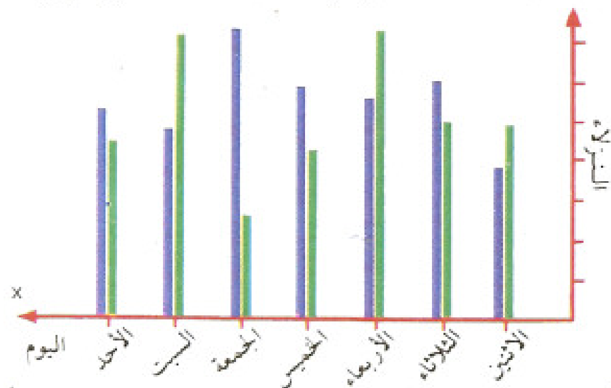
كم كان عددُ نزلاءِ فندقِ المنتجع في السنوات 1978-84؟ .



كلُّ عمود في هذا المخطط يمثل عددَ النزلاء في سنة واحدة من السنوات السبع ، ولا علاقة لها بالسنوات الأخرى .

4. الرسم البيانيُّ للتواتر :

كم عددالذين نزلوا إلى الشاطىء في الأسبوعين الأوّلين من حزيران؟ .



ميزةُ هذا الرسم أنك تستطيعُ أن تسجل عدةَ أسابيعَ في رسم واحد . هل تستطيع أن تعرفَ في أي الأيام كانت السماء ماطرة؟ وفي أيها كان الحرّ شديداً؟ .

ثلاثةُ أنواعٍ من المُعَدلات :

كثيراً ما نحتاجُ إلى معرفة سريعة لغالبيةِ ما أمامنا من بيانات . لذلك يستعملُ الإحصائيون واحداً من ثلاثة أنواعٍ من المعدّلات هي الوسيط والوسط والمتوسط الحسابي وذلك حسب نوعِ العمل :



يريد فريد أن يعرفَ معدل أحجام الأرجل كي يحدد حجوم الأحذية التي يستوردُها . فالمعدل الذي يتطلبه هنا هو الوسيط، أي المقاس الشائع .



هذه لعبةٌ بها يضربُ اللاعب ثقلاً ما بالمِطْرَقة . فإذا كانت ضربتُه أكبرَ من المعدل يقرع جرس . لذلك وجد صانع اللعبة معدلَ قوى الناس بأن قاس قوى 100 فرد وأخذ متوسطها، إن المتوسط هو ما يقع في الوسط .



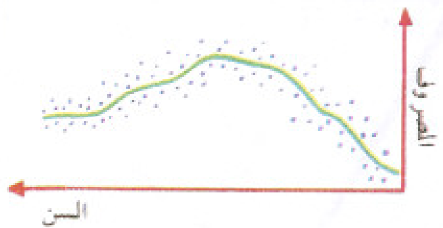
أما المعدلُ الأكثرُ شيوعاً فهو المتوسط الحسابي، وذلك بأن تجمعَ جميعَ البيانات وتقسمُ مجموعَها على عدد المشتركين . في هذه الحالة كان مجموعُ ما صاده الثلاثةُ من السّرطانات 21 . تقسم عليهم بالتساوي فينال كل واحد 7 وهذا هو المتوسّط الحسابي .





5. بيان التوزيع :

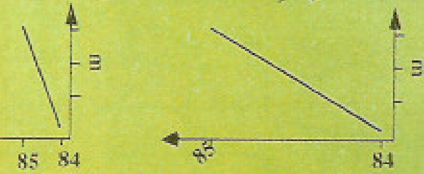
هل من علاقة بين المبالغِ التي تُصرف وأعمارِ الذين يصرفونها؟ يستعملُ بيان التوزيع لرسم معلومات لا علاقةَ ظاهرةً بينها، وذلك لاكتشافِ ما يظهرُ من اتّجاهات .



هنا رسمت ليلى مقدارَ المصروف لكل عمرٍ من أعمارِ النزلاء . ماذا يبيّنُ لك الرسم؟ .

الإحصائياتُ لا تكذُبُ !
ولكنّ الكذّابين يستعملون الإحصائيات !

انظر بتمعّن في الإعلانات والبيانات السياسية التي تستعملُ الإحصائيات . فهي قد تكونُ مُضلّلة .



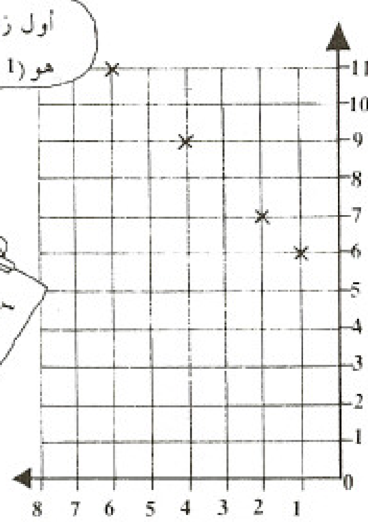
هذان الرّسمانِ يُبيّنان نفسَ المعلومات، إلا أن الأيمنَ منهما نُظِّمَ ليظهرَ الزيادةَ في عددِ المواليد . هل تعرفُ كيف تمّ ذلك؟ .

مزيدٌ عن الرسومِ البيانية

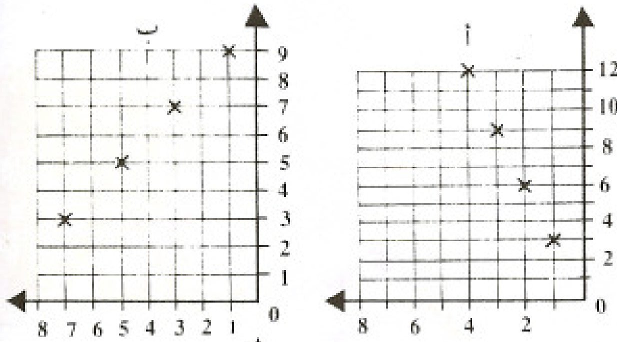
وصفُ العلاقات :

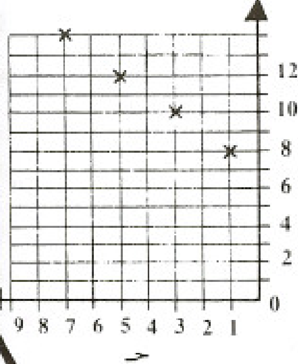
تكتبُ ص = س + 5 لتقولَ إن كلّ أعداد ص تزيد 5 على أعداد س والخطّ المنقط الكائن على الرسم البياني يدعى خط ص = س + 5.

وقد نُعبِّر عن ذلك بالصيغة س ← س + 5.
وهذه تقرأ عادة، كالتالي : س تقترن بـ س + 5.
استعملْ من هاتين الصيغتين ما تراه أسهل.











أنظرْ إلى مجموعتي الأعدادِ على اللوحةِ المرسومةِ أعلاه. فكلُّ عددٍ إلى اليمين يزيدُ خمسةً على العددِ الذي إلى يسارِه. وقد رسمنا هذه الأزواجَ من الأعدادِ في الرسمِ البياني المرافق. ولأنّ كلّ هذه الأزواجِ من الأعدادِ تحافظُ على هذه العلاقة، أي أن العددَ ص يزيدُ 5 على العددَ س، فإنّ النقط كلَّها تقعُ على خطٍّ مستقيم. وكلُّ زوجٍ آخرَ من الأعدادِ بهذه العلاقةِ يقعُ أيضاً على هذا الخط؛ مثلاً − 2، 3 و $2\frac{1}{2}$، $7\frac{1}{2}$.

حلُّ المعادلات :

كلُّ واحدةٍ من المعادلات السابقةِ تصفُ علاقةً تسري على أزواجٍ كثيرةٍ من الأعدادِ، فأنت تستطيعُ أن تجدَ قيمةَ ص التي ترافقُ قيمةَ س، وبالعكس. وفي صفحة 21 (عن الزوايا) رأيت أن 110 + جـ = 180. ولأنّ المجموعَ الكليّ للزوايا كان 180°، استطعنا أن نجدَ قيمةَ حـ.

وهناك طريقةٌ أخرى لإيجادِ قيمة حـ وذلك بأنْ نرسم الخطَّ البيانيَّ للمعادلة هـ = حـ + 110*.
ولكنّ هذه الطريقةَ قد تستغرقُ وقتاً طويلاً. لذا نلجأُ إلى طرقٍ أخرى لحلِّ المعادلات. وفي الصفحةِ المقابلةِ طريقتان مختلفتان لحلِّ هاتين المعادلتين:

2 ص − 7 = 11 و $\frac{5\,(ف - 32)}{9} = 20$



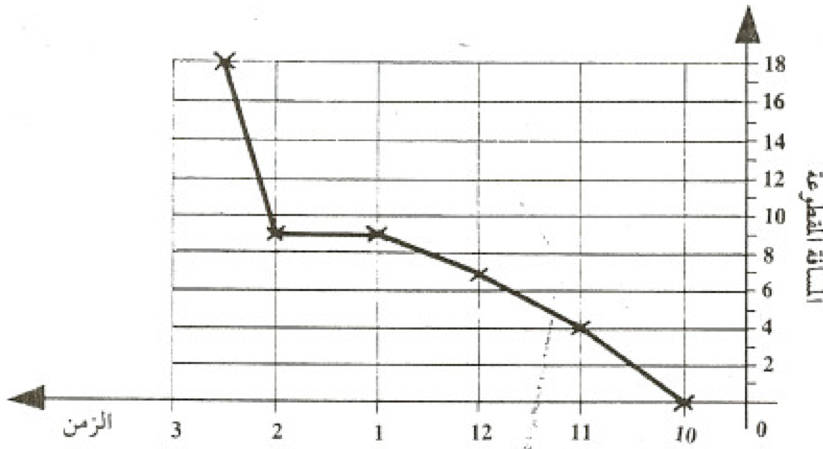
هذه هي الصيغةُ التي بها نُحوّلُ دَرجاتِ سنتغراد إلى فارنهيت وبالعكس.

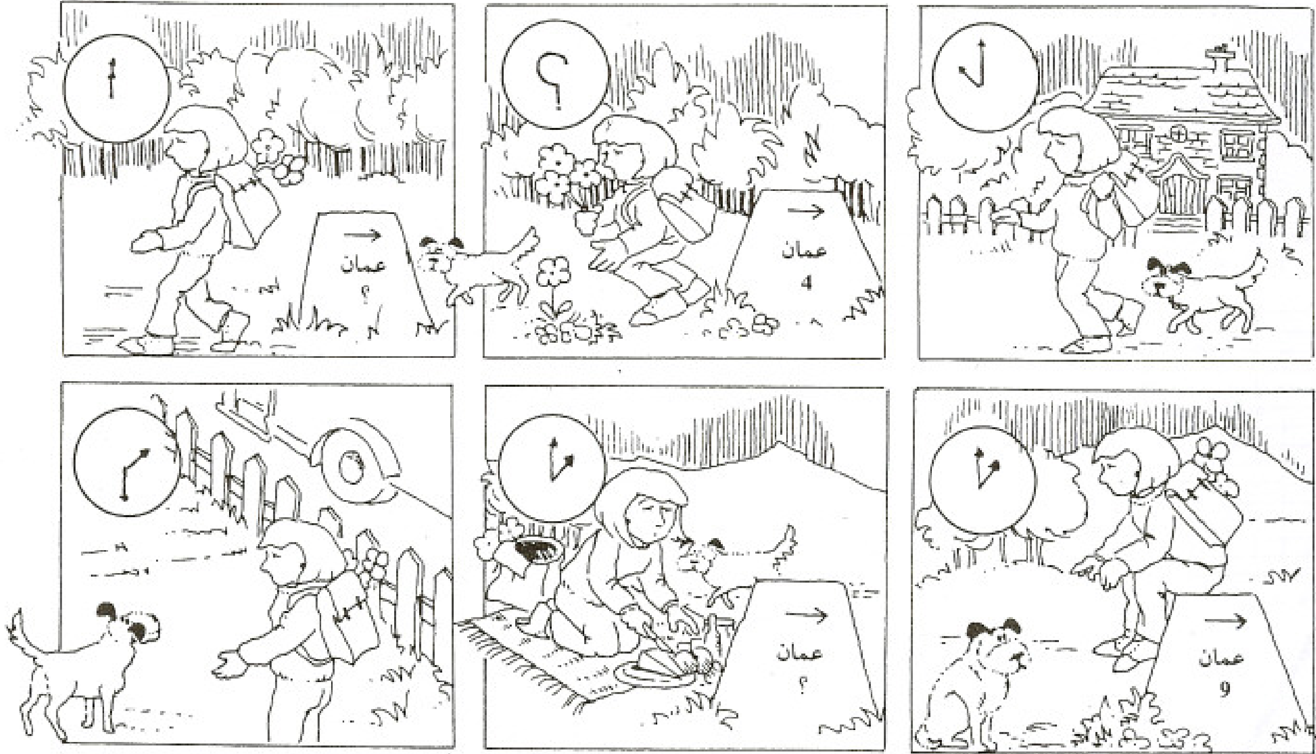
* يمكنك أن تستعمل أيّ حروفٍ تشاءُ للتعبيرِ عن الكمياتِ في المعادلة.



لغزُ صورة:

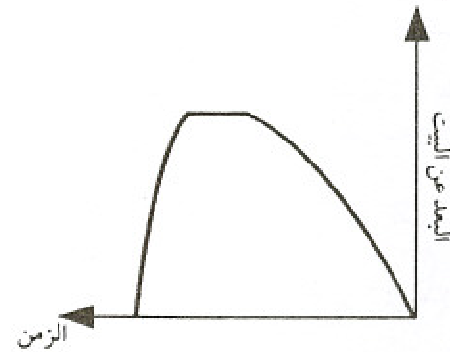
الصور السُّفلى تحكي قصةَ فتى خرجَ مَشياً على الأقدام، والخطُّ البياني الأيمنُ يصفُ رحلتَه. فكلّ نقطةٍ على الخط تبين كم قَطع في وقت معين. هل تستطيعُ أن تملأ الفراغاتِ المبينةَ بالصّور؟.



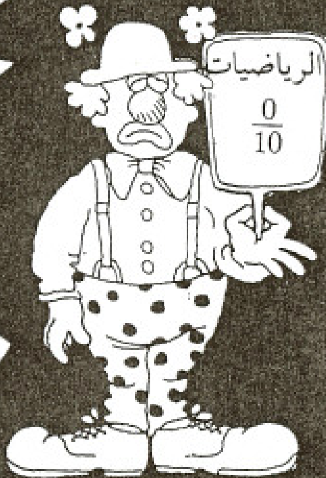


قراءةُ الرسومِ البيانية:

أهمُّ ما في قراءة الرسمِ البيانيِّ أن تلاحظَ ماذا يَعني كلٌ من المحورين.



هذا رسمٌ للرحلة المبينةِ في الشكل الأعلى، إلا أن دلالاتِ المحاورِ تختلفُ. فهنا بدَلَ أن تعطى المسافةُ المقطوعةُ إجمالاً أُعطي بُعدُ الفتى عن النقطةِ التي بدأ منها.



تحذير:

لا تتسرَّعْ في حُكمِك.

قد يُظهرُ الرسمُ البيانيُّ مثلاً، أن نتائجَ الناسِ تتحسن في امتحان الرياضيات كلّما زادت حجومُ نِعالهم. هل يَعني هذا أنه كلّما كبُرت قدماك أصبحت أحسنَ في الرياضيّات؟.

فتشْ دائماً عن العوامل الأخرى التي قَد تسببُ في إيجاد العلاقة.

مزيدٌ عن الرسومِ البيانية

وصفُ العلاقات:

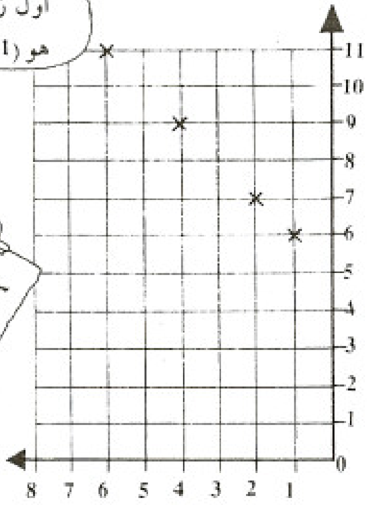
تكتبُ ص = س + 5 لتقولَ إن كلّ أعداد ص تزيد 5 على أعداد س والخطّ المنقط الكائن على الرسم البياني يدعى خط ص = س + 5.

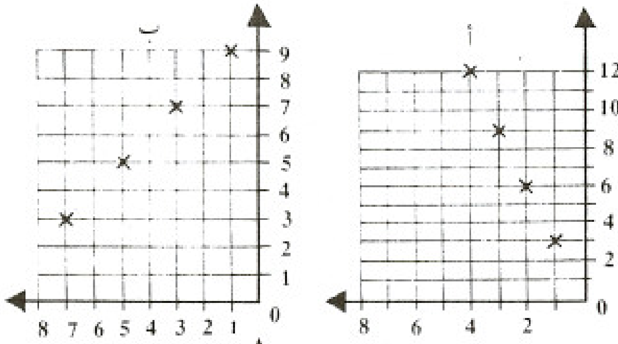
وقد نُعبِّر عن ذلك بالصيغة س ⟵ س + 5.

وهذه تقرأ عادة، كالتالي: س تقترن بـ س + 5.

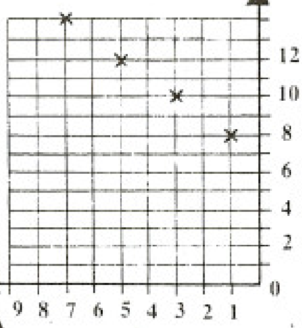
استعملْ من هاتين الصيغتين ما تراه أسهل.







أنظرْ إلى مجموعتي الأعداد على اللوحةِ المرسومةِ أعلاه. فكلُ عددٍ إلى اليمين يزيدُ خمسةً على العددِ الذي إلى يساره. وقد رسمنا هذه الأزواجَ من الأعدادِ في الرسم البياني المرافق. ولأنّ كلّ هذه الأزواجِ من الأعدادِ تحافظُ على هذه العلاقة، أي أن العددَ ص يزيدُ 5 على العدد س، فإنّ النقط كلّها تقعُ على خطٍّ مستقيم. وكلُ زوجٍ آخرَ من الأعدادِ بهذه العلاقةِ يقعُ أيضاً على هذا الخط؛ مثلاً – 2، 3 و $2\frac{1}{2}$، $7\frac{1}{2}$.







حلُّ المعادلات:

كلُّ واحدةٍ من المعادلات السابقةِ تصفُ علاقةً تسري على أزواجٍ كثيرةٍ من الأعدادِ، فأنت تستطيعُ أن تجدَ قيمةَ ص التي ترافقُ قيمةَ س، وبالعكس. وفي صفحة 21 (عن الزوايا) رأيت أن 110 + جـ = 180. ولأنّ المجموعَ الكلّي للزوايا كان 180°، استطعنا أن نجدَ قيمةَ جـ.

وهناكَ طريقةٌ أخرى لإيجادِ قيمة جـ وذلك بأنْ نرسم الخطَّ البيانيّ للمعادلة هـ = جـ + 110*.

ولكنّ هذه الطريقةَ قد تستغرقُ وقتاً طويلاً، لذا نلجأُ إلى طرقٍ أخرى لحلِّ المعادلات. وفي الصفحةِ المقابلةِ طريقتان مختلفتان لحلِّ هاتين المعادلَتين:

2 ص – 7 = 11 و $\frac{5\ (ف - 32)}{9} = 20$



هذه هي الصيغةُ التي بها نُحوّلُ دَرجاتِ سنتغراد إلى فارنهيت وبالعكس.

* يمكنك أن تستعمل أيّ حروفٍ تشاءُ للتعبير عن الكميات في المعادلة.

رسـم المعـادلات :

تستطيعُ أن ترسمَ أي علاقةٍ تُعطَى لك بأيٍّ من الصيغتين السابقتين . اتبعْ الخُطواتِ المبينة إلى اليسارِ في رسمِ المعادلة ص = س + 3 .

1 ـ جِدْ بضعةَ أزواجٍ من الأعدادِ تنطبقُ عليها هذه العلاقة .

س	ص
1	4
3	6
5	8

2 ـ ضعْ هذه النقـط على رسم بيانيّ .

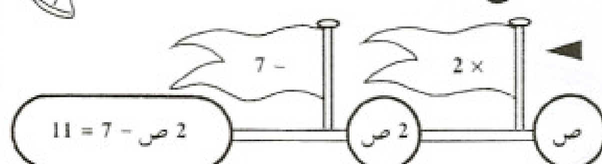
3 ـ صِلْ بين هذه النقط بخط .

عند عكس العملية اعكس الإشارة التي على الأعلام .

المعادلةُ المطلوبُ حلّها : 2 ص $- 7 = 11$

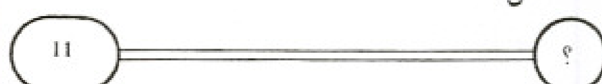
طريقـة العمـل :

الشـرح :

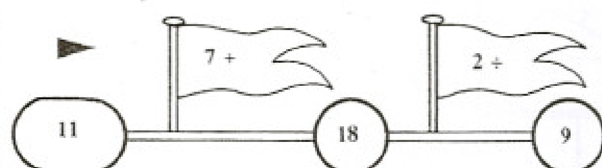


ضاعفْنا قيمةَ ص ، وطرحنا 7 من الناتجِ فكانَ الجوابُ 11

الحـل :



لإيجاد قيمةِ ص التي ينتجُ عنها 11 ، اعكس العَمليّة :



الجواب ص = 9

الطريقـةُ الجبريـة :

الشّـرح :

يجب أن نأخذَ 7 من 2 ص ليبقى 11

الحـلّ :

إذا كان 2 ص $- 7 = 11$

فـإن :

2 ص $= 11 + 7$

وهكـذا :

2 ص $= 18$

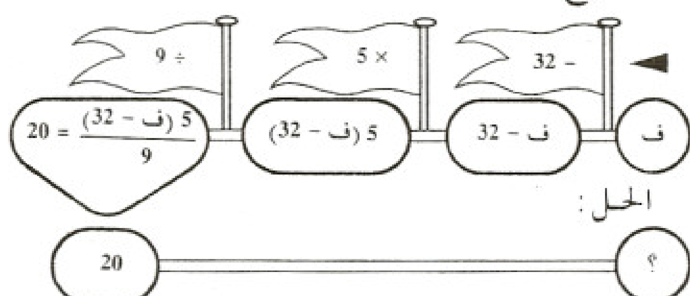
ص $= 9$

الجوابُ ص = 9

المعادلةُ المطلوبُ حلّها : $\frac{5\,(ف - 32)}{9} = 20$

طريقـة العمـل :

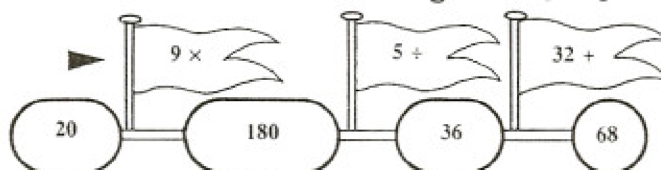
الشَّـرح :



الحـل :

؟ ——— 20

وهنا أيضاً تعكسُ العَملية :



الجوابُ ف = 68 . ولذا فعندما تكونُ دَرجةُ الحرارةِ 20° س تكون 68° ف .

الطريقـةُ الجَبْريّـة :

الشـرح :

تأخذ 32 من ف ونضرب الباقي في 5 ، ونقسم الناتج على 9 فيكون الناتج الأخير 20 .

الحـل :

إذا كان $\frac{5\,(ف - 32)}{9} = 20$

فإن $5\,(ف - 32) = 20 \times 9$

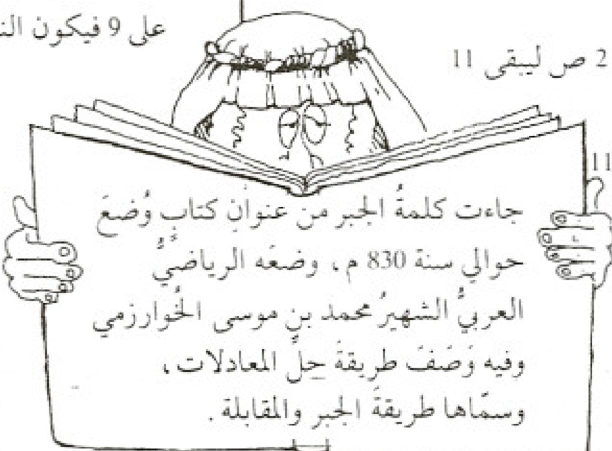
وهكذا $5\,(ف - 32) = 180$

و $(ف - 32) = \frac{180}{5} = 360$

فإذا كان ف $- 32 = 36$

فإن ف $= 36 + 32 = 68$

الجـوابُ ف = 68 .

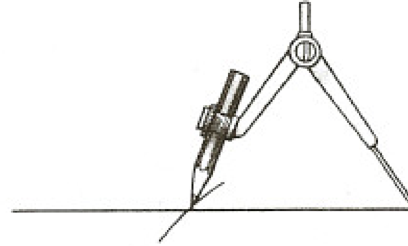


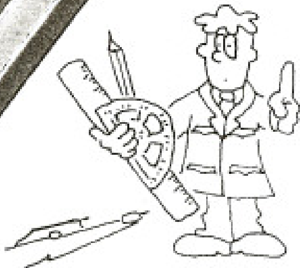
الهندســـة :

تُعلِّمنا الهندسةُ أن نرسُمَ أشكالاً رياضيةً دقيقة ، ومنذ القرنِ الرابعَ عشرَ قبلَ الميلاد كان الناسُ في مصرَ يدرسون طرقَ القياسِ الدقيق ، لأنَّ الضرائبَ كانت تُدفعُ حسب حجمِ المُمتلكات . أما اليومَ فإن رسمَ الخرائطِ والمساحةَ وتخطيطَ الطّيران ، والهندسةَ المعمارية ودوراتِ الحاسوب ، كلُّها تعتمدُ على الدّقةِ الهندسية ، وإليك بعضَ الإنشاءاتِ الهندسيةِ المِعْياريّة .

رسم خط بطولٍ دقيق :

ارسمْ أولاً خطاً أطولَ من المطلوبِ ، وضعْ علامةً عندَ أحدِ طرفيه ، ثم افتحْ فرْجارَك بالطولِ المطلوب .

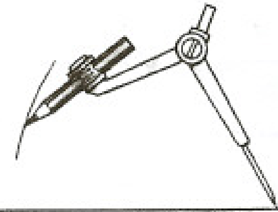




ضعْ رأسَ الفرجارِ على العَلامةِ وارسمْ قوساً صغيراً على الخطِّ بقلمِ الفِرجار .

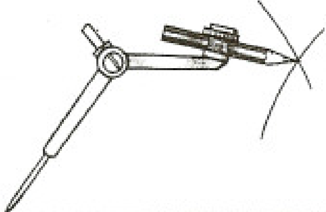
رسمُ مثلّثٍ (أضلاعُه 5 سم ، و 3 سم ، و 7 سم) :

1 ـ عيّنْ طولَ 7 سم على خطٍّ مستقيم .

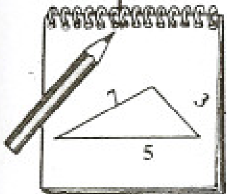


2 ـ افتح الفرجارَ بطولِ 3 سم وضعْ رأسَه عند أحدِ طَرفي الخطِّ وارسم قوساً كما في الشكل .

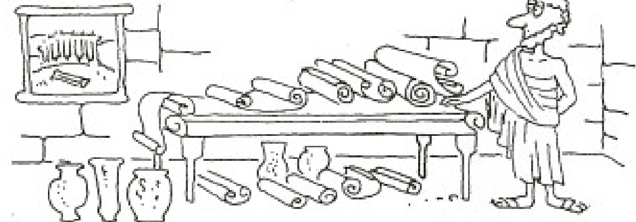
3 ـ افتح الفرجار بطولِ 5 سم وارسمْ قوساً ثانياً من الطّرَفِ الثاني للخطّ .



4 ـ صِلْ بين الرؤوسِ الثلاثةِ وتأكدْ من صحةِ الأطوالِ بالقياس .

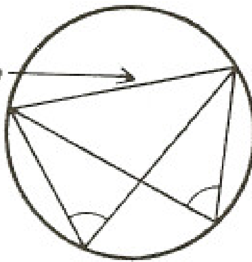


الرياضياتُ اليونانيةُ في يومِنا هذا :



إننا ما زلنا نُعجبُ باليونان القُدماءِ لدقةِ معارفِهم الهندسية . ومن أشهرِ رياضيّيهم إقليدس الذي مكّنته دقةُ أشكالِه الهندسيةِ من الوصولِ إلى اكتشافاتٍ هامةٍ وفي هاتين الصفحتين اثنان منها .

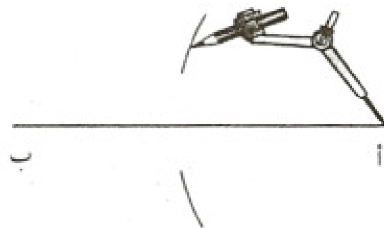
نظرية إقليدس :



إذا رُسم وترٌ عَبْرَ دائرةٍ ما فكلُّ الزوايا التي تُرسَمُ منه إلى مُحيطِ الدائرة تكونُ بنفسِ الحجم ، شرط أن تكونَ النقاطُ على الجانبِ نفسِه من الوتر .

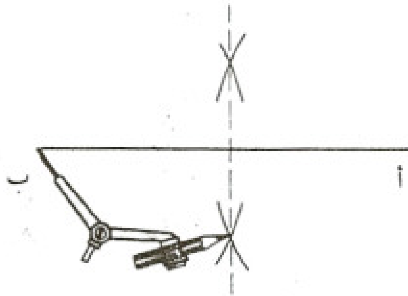
تنصيفُ الخطِّ :

1 ـ افتح الفرجارَ أكثرَ من نصفِ الخطِّ .

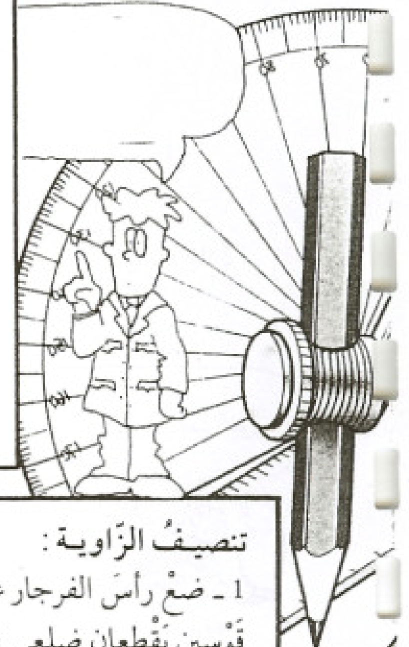


2 ـ من أحدِ طَرَفي الخطِ ارسمْ قوسين أحدُهما فوقَ الخطِّ والثاني تحته ، كما في الشكل .

3 ـ أعِدْ هذا العملَ من الطَرَفِ الثاني للخطِّ دون تغييرِ فتحةِ الفِرجار .

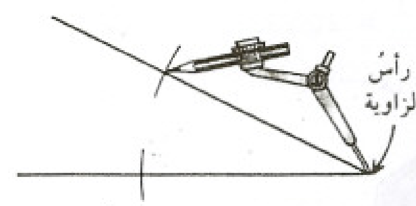


4 ـ صِلْ بين نُقطتي التقاطعِ بخطٍّ ، وهذا الخطُّ يُقسِّمُ أ ب إلى نصفين .

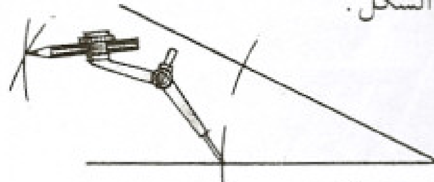


تنصيفُ الزّاويـة :

1 ـ ضعْ رأسَ الفرجار عند رأسِ الزاوية ، وارسمْ قوْسين يَقْطعان ضِلعي الزاويةِ كما ترى .



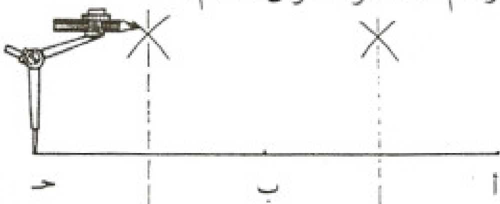
2 ـ ضعْ رأسَ الفِرجار عند كلٍّ من نقطتي التقاطعِ وارسمْ قوسَين آخرين يتقاطعان في نُقطة ، كما في الشكل .



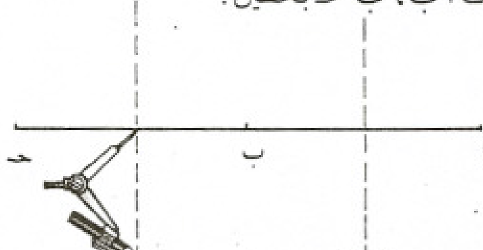
3 ـ الخطُّ الذي يَصِلُ رأسَ الزاويةِ بنقطةِ تقاطعِ هذين الخطين يَقْسِمُ الزاويةَ إلى نِصفين .

رسمُ خطّين مُتوازيين (البعد بينهما 2 سم) :

1 ـ ارسمْ خطاً طولُه حَوالى 4 سم .

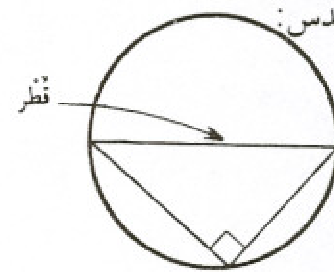


2 ـ علِّمْ ثلاثَ نُقط أ ، ب ، حـ على الخَط ، ثم نَصِّفْ أ ب ، ب حـ بخطين .



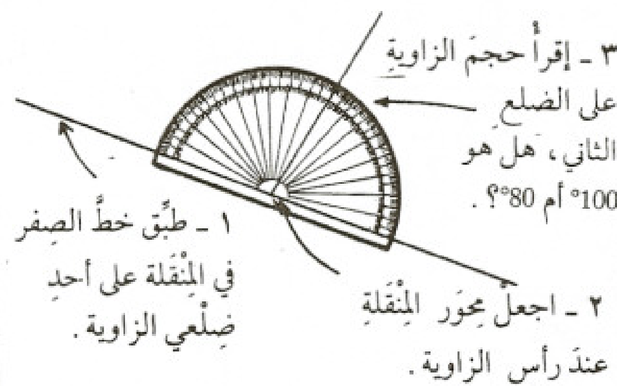
3 ـ علِّم طولَ 2 سم على كلٍّ من الخطين بَدْءاً من نقطةِ تقاطعِه مع خطِّ أ ب حـ . صِلْ بين العَلامَتين بخط .

نظريةٌ ثانيةٌ لإقليدس:



إذا مَرَّ وترٌ بمركز الدائرةِ (أي كان قُطراً فيها) فأيُّ زاويةٍ ترسُمُ منه إلى محيطِها هي 90°.

أسهلُ طريقةٍ لاختبارِ نَظريتي إقليدس هي أن ترسُم دوائر وأوتاراً وأن تقيسَ الزّوايا بالمِنْقلة .



٣ ـ إقرأْ حجمَ الزاويةِ على الضلعِ الثاني ، هل هو 100° أم 80°؟ .

١ ـ طبِّق خطَّ الصِفر في المِنْقَلة على أحدِ ضِلْعي الزاوية .

٢ ـ اجعلْ مِحوَر المِنْقَلةِ عندَ رأسِ الزاوية .

نماذج عدديـة :

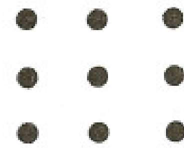
لقد توصل الرياضيون ، منذ أيام فيثاغورس (حوالي 550 ق . م .) إلى الكثيرِ من اكتشافاتِهم عن طريقِ دراسةِ النماذجِ الموجودة في نظامِنا العدديّ . وفي هاتين الصفحتين نقدمُ لك بعضَ المعلوماتِ عن قليلٍ من هذه النماذج .

المربعـات :

يوضعُ الرقم 2 فوقَ أي عددٍ ليقولَ لك أن تضربَه في نفسِه :

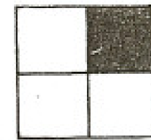
$2^2 = 4$ ، $9^2 = 81$ ، $12^2 = 144$

والرقمُ 2 الصغيرُ يدعى القوة ويقرأ المربع لأنّ ضربَ العددِ في نفسِه يُشرحُ بمربع :



$3^2 = 9$

وكل عددٍ يمكن تربيعُه ، ولكنّ الجوابَ قد يكون غير ما تتوقع :



$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

الجـذورُ التّربيعيّـة :

الجذرُ التّربيعيُّ لأيّ عدد هو العددُ الذي إذا ضُربَ في نفسه يُنتجُ العدَ الأصلي .

الجذرُ التربيعيُّ للعدد 12.96 هو 3.6 لأن $3.6 \times 3.6 = 12.96$.

القِـوَى :

كثيرٌ من الحسابات في الرياضيات تستلزمُ ضربَ العددِ في نفسِه أكثرَ من مرة ، ولذا كثيراً ما نجد قوًى أكبَر من 2 . فالمليون يساوي :



$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$.

والقوةُ 6 تعني أنّ 6 عشرات ضرب بعضها في بعض . $2^5 = 32$ لأن $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ القوة 3 تسمى عادة المكعب .



الأعـدادُ الأوّليّـة :

هذه الأعدادُ حيّرت الرياضيين قُروناً طويلة ، لأنها لا تتّبعُ أيَّ نمطٍ معروف . العددُ الأوليُّ ليس له أيّ عامل غيرَ نفسِه والواحد . والعاملُ في عددٍ يَقسِمه دُون باقٍ . فالعددُ 40 ليس أولياً لأنّ عواملَه 1 ، 2 ، 4 ، 5 ، 8 ، 10 ، 20 ، 40 فله إذن ثمانيةُ عوامل . إلّا أن 41 لا ينقسمُ إلا على 1 ، 41 ولذلك فهو أوليّ .

تِبيـانُ الأعدادِ الأولية :

من الطرقِ لإيجادِ الأعدادِ الأولية دون 121 هي أن تُقسم كلَّ عددٍ على 2 ، 3 ، 5 ، 7 . فما انقسَم ليس أولياً ، وما لم ينقسمْ فهو أولي .

وإذا شئنا توسيعَ هذا الاختبارِ ليشملَ القِسمةَ على 11 فيجبُ أن نختبرَ جميعَ الأعدادِ التي دون 169 . هل تعرفُ لماذا؟ .

الضربُ بالقوى:

$2^5 \times 2^3 = (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2^8$.

عند ضَرْب عددين متساويين بقوى متساويةٍ أو مختلفة، كلُّ ما يلزمُ هو جمعُ القوى (الأُسُس).



قسمةُ القوى:

$2^5 \div 2^3 = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 2^2$.

عندقسمةعَددينمُتماثلينولكنْبقوى مختلفةاطرح الأُسُس:

$2^3 \div 2^5 = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} = 2^{-2}$ أو $\frac{1}{2^2}$

الأُسُّ السالبُ دائماً يقول لك إنّ العددَ مقلوب، أي أنه في المَقام (والبسط واحد).

$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000}$

هل يمكنُك أن تكتبَ 10^{-5} بالشكلِ المقلوب؟.

الأشكال المعيارية:

كثيراً ما يتعامل العلماء مع أعداد كبيرة جداً وأعداد صغيرة جداً. فمثلاً بعد الأرض عن ألفا كنتاورس الذي هو أقرب نجم إلينا بعد الشمس، هو 000 000 000 000 350 40 م وأنوار الصوديوم التي تنير الشوارع طول موجتها 589 000 000.0 م ومن غير الملائم كتابةُ الأعداد بهاتين الصيغتين، لأن تصورها صعب وقراءتها صعبة، وهي عرضة للخطأ في الكتابة وفي القراءة، ولذا نكتبها بما يسمى الصيغة المعيارية. والصيغة المعيارية تقتضي أن يكون العددُ بين الواحد والعشرة، مضروباً بقوى العشرة. فبُعد ألفا كنتاورس عن الأرض هو 4.035×10^{16}

وكذلك طولُ موجةِ ضوءِ الصوديوم = 5.89×10^{-7}.



784 000 000 000

0.000 00072453

قواعدُ للأعدادِ الأولية:

حاولَ رياضيّونَ كثيرون أن يَضعوا قوانينَ لإيجادِ أعدادٍ أولية. من هذه القوانين:

القوانين $ن^2$	− ن	+ ٤١	= عدداً أولياً.
اضربْ أيَّ عددٍ في نفسِه	اطرحْ من الناتجِ العددَ الأصليَّ	إجمعْ 41	الناتج عددٌ أوليّ

يصحُّ هذا القانون لبعضِ الأعداد، ولكنه يفشلُ إذا كان العددُ 41. جرِّبْ هذا القانونَ بنفسِك.

شيفرات سرية:

ليس هنالك قاعدةٌ لتعيينِ الأعدادِ الكبيرةِ الأولية. فلا نعرفُها إلا بالقسمةِ الطويلة. وأكبرُ عددٍ أوليّ اكتُشفَ حتى اليوم يتكوَّنُ من 25692 منزلة.

وقد استغرقَ الكمبيوتر عدةَ أسابيع في الحصول عليه، ولأنّ الأعدادَ الأوليةَ تستعصي على المكتشفين، فإنها تُستعملُ في أحدثِ الشيفراتِ السرية، وهذا هو الاستعمالُ الوحيدُ لها.

الأعـدادُ الثُّنائيّة :

يستطيعُ الحاسوبُ والحاسباتُ الإلكترونية، أن تَحُلَّ مسائلَ بالغة التعقيد، ولكنّها لا تستطيعُ أن تتعاملَ مع نظامِنا العَشْريِّ بطريقة مباشِرة. إن تعامُلَها مع معلوماتٍ تُعطى على شكل إشاراتٍ كهربائية، والإشارةُ قد تكونُ مَفتوحة (ON) أو مُغْلَقة (OFF). وهذا يدعى نظامَ العدّ الثنائي (للأساس 2).

مثال 23 للأساس 10

ستّ عشرات ثمانيات أربعات اثنينات آحاد

1 0 1 1 1

= 1 × 1 + 2 × 1 + 9 × 1 + 8 × 0 + 16 × 1

23 = 1 + 2 + 4 + 16

إذن 23 أساس 10 تكتب 10111 أساس 2*

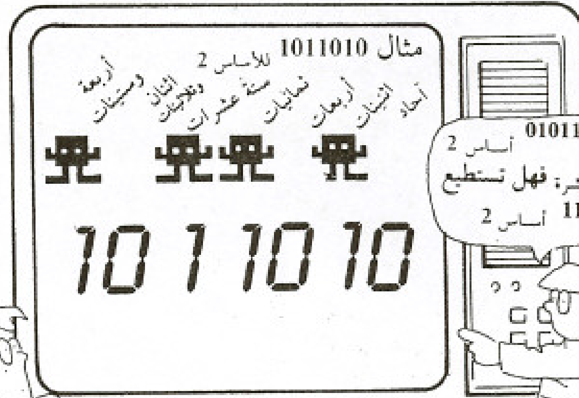
فلتحويل 37 أساس 10 مثلاً للثنائي، كل ما يلزم هو: أن تحسب كم 32، 16، 8، 4، 2، 1. فكيف تكتبها بالنظام الثنائي؟.

كيف يعملُ النظامُ الثُّنائي :

مَبدأُ النظام للأساس 2 هو نفسُ مبدأ نظامِنا العَشْرِي، ويسمّى أيضاً النظامَ للأساس 10. فكلُّ رقم تختلفُ قيمتُه باختلافِ منزلتِه في العدد. ففي النظام العَشْري تُبيّنُ الأرقام عددَ الآحاد فالعشرات فالمئات فالألوف . . . (انظر الصفحة 6). وفي النظام الثنائيّ تبيّنُ الأرقامُ عددَ الآحاد فالإثنينات فالأربعات فالثمانيات الخ.

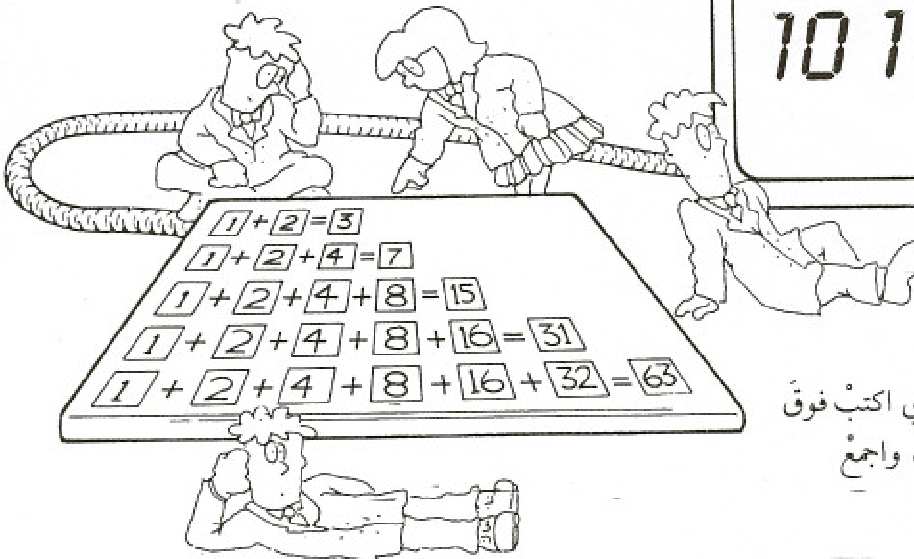
وفي النظام الثنائيِّ تَكْتُب الأعدادُ مُستعملاً رقمين فقط هما 0، 1. ولمعرفةِ قيمةِ أيِّ مَنْزلة: ضاعفْ قيمةَ المنزلة التي إلى يمينِها. وكلُّ منزلةٍ هي في الواقع قوةٌ من قِوى 2، كما أن كلَّ منزلةٍ في النظام العَشْريْ هي مِن قوى 10*.

تحويل الثُّنائيّات :



أحجيَـةُ الواحدِ الناقص :

هل تَستطيعُ أن تَعرفَ مجموعَ 1 + 2 + 3 + 8 + 16 + 32 + 64 من غيرِ أن تجمعَ؟.



عند تحويلَ أيِّ عددٍ من الثنائي إلى العُشْري اكتبْ فوقَ كلِّ رقم عنوانَ منزلتِه، ابتداءً من اليمين، واجمْعْ عناوينَ المنازِل التي فيها الرّقم 1.

* لمزيد من المعلومات عن القوى راجع الصفحتين 38 و 39.

حسابُ الثُّنائيات :

يمكنُ أن تحسُبَ الثنائياتِ دونَ الحاجة إلى تحويلِها إلى عَشْريات .

إليكَ مراحلَ إيجادِ مجموع 1101 أساس 2 و 101 أساس 2 .

8421	8421	8421	8421
1101	1101	1101	1101
+ 101	+ 101	+ 101	+ 101
0	10	010	10010

واحدان يساويان 2 فتحمل إلى المنزلة التالية

أربعتان تساويان 8 . . .

ثمانيتان تساويان 16

عندَ طرحِ ثنائيةٍ من ثنائية ، غالباً ما تحتاجُ إلى طَرْحِ 1 من 0. انظرْ في هذا الحلِّ .

8421	8421	8421	8421
1011	1011	1011	1011
-- 101	-- 101	-- 101	-- 101
0	10	10	110

لا مشكلةَ هنا .

لا يمكنُ طرحُ 4 من لا شيء .

اطرحْها من الثّمانية في العمودِ التالي .

مسائلُ الحاسوب :

عندما يُرسِلُ حاسوبٌ رسالةَ إلى حاسوبٍ آخرَ باستعمالِ الآحاد والأصفارِ يجبُ التأكدُ من أنّ الحاسوبَ المستقبِلَ يتلقى المعلوماتِ الصحيحة . لذا نحتاجُ إلى وسيلةٍ لاكتشافِ الخطأ .

لماذا يفضل تكرار الرقم مرتين على تكراره مرة واحدة؟ .

إحدى الوسائلِ المستعملةِ هي أن نكررَ كلَّ رقمٍ مرتين إضافيتين. فالرقمَ 1100111 يصبحُ 111 111 000 000 111 111 111 111 .هناك غلطتان في العدد: 101 0000 10 111 0000 أتعرفُ ما هما؟ .

ما نزالُ نستعملُ الأساسَ 60 في حسابِ الدقائقِ والثواني . ما مقدارُ 1920 ثانية بالدقائق؟

أُســسُ أُخــرى :

تستطيعُ في الواقعِ أن تحسب لأيِّ أساس تشاء ، ففيَ الأساس 4 مثلاً تكونُ قِيمُ المنازل 1 ، 4 ، 16 ، 64 . . . . على التوالي .



الاحتمالات:

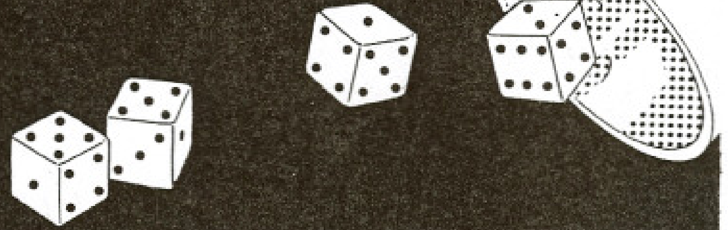
دراسةُ الاحتمالاتِ من أكثرِ فروعِ الرياضيات إثارة، لأنها تُمكّننا من إلقاءِ نظرةٍ على المستقبل. إنّ قوانين الاحتمالات لا تستطيعُ أن تتوقّعَ بالضبط ما قد يحدث، ولكنّها تستطيعُ أن تشيرَ إلى وقوعِ أكثرِ الأحداثِ احتمالاً. وفي الصفحاتِ الثلاثِ التالية نبين كيف تُحسبُ الاحتمالات. وعلى الصفحةِ 45 تجدُ برامجَ أُعدت لتُجرَى على الحاسوبِ المنزليّ لمعرفةِ مدَى صحةِ ما تتوقعه الاحتمالات.

اقذفْ قطعةَ عملةٍ فضية في الفضاء، عندما تستقرُّ القطعةُ على الأرض يكون احتمال وقوعها على الوجه الذي فيه صورة مساوياً لاحتمال وقوعها على الوجه الذي عليه كتابة. فاحتمالُ وقوعها إذن على هذا الوجه أو ذاك هو 50-50 أو $\frac{1}{2}$.



أزواج في النرد:

هنالك ألعابٌ كثيرة يستعمل فيها نردان. فما احتمالُ ظهورِ زوجٍ (ستّتيْن أو خمْستيْن، الخ)؟.
لحسابِ احتمالِ وقوعِ أيّ حدث، جِدْ أولاً كلّ النتائج المحتملة.

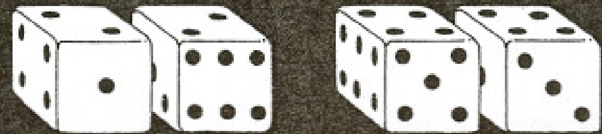


أ) فهنالك 36 وضعاً يمكن أن يستقرّ عليها النردانِ، كلّها متساويةُ الاحتمال.
ب) من هذه الأوضاع: ستةٌ فقط أزواج، فاحتمالُ ظهورِ زوج هو 6 من 36 (أي $\frac{1}{6}$).



مُزْدوجُ الأزواج:

ما احتمالُ ظهورِ مُزدوجين مُتَتاليين في رَمْيتين؟.



كلَّ مرةٍ يأتيك مزدوجٌ في الرّمية الأولى، هنالك احتمال 1 إلى 6 أنْ يأتيك مزدوجٌ في الرمية الثانية. إذن هناك $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$ أي ($\frac{1}{36}$) احتمال أن تحصلَ على مزدوجين في الرميتين.

القاعــدة 1:

عندما تعتمدُ النتيجةُ على وُقوعِ عدةِ أحداث، اضربْ الاحتمالاتِ بعضَها في بعض.

المخططاتُ المشجَّرة:

تُخططُ عائلةٌ لإنجابِ مولودين ذكرين، واحتمالُ وقوعِ ذلك هو $\frac{1}{4}$. ذلك لأنّ هنالك أربع حالاتٍ مُحتملة، كما يُبيّن المخطط المشجّر إلى اليسار. واحتمالُ مجيءِ الأنثى كاحتمالِ مجيءِ الذكر. والمخططُ المشجّر وسيلةٌ مفيدةٌ لمعرفةِ الاحتمالات، لأنها تمكّن من رؤيةِ كلِّ الاحتمالات الممكنة.



احتمالاتُ الرّبـح:

استعمل كلَّ الطرقِ المبينةِ أدناه لحسابِ احتمالات ربحِك في هذه اللُّعبة.

أ) هنالك 52 ورقةَ لَعب تشتملُ على 4 آسات و 12 صورة، أي 16 ورقة رابحة من 52. فاحتمالُ الربحِ $\frac{16}{52} = \frac{4}{13}$.

ب) هنالك 4 آسات، احتمالُ ربحِها $\frac{4}{52} = \frac{1}{13}$.

وهنالك 12 صورة احتمال ربحها $\frac{12}{52}$ أو $\frac{3}{13}$ ويعني مجموع احتمالات من $\frac{1}{13} + \frac{3}{13} = \frac{4}{13}$



القاعـدة 2:

إذا كان الحدثان متباعدين، أي لا يَعتمدُ أيٌّ منها على الآخر، إجمعْ احتمالَيهما.

سُلَّـم الاحتمـالات:

يستعملُ الرياضيون سُلماً مدرّجاً من 0 إلى 1 ليبيّنوا احتمالَ وقوعِ أيِّ حدث. وهم يعتمدون على الإحصاءِ للحكمِ على الحدثِ إذا كان ممكناً أو لا.

1. ستُمطر في السنةِ القادمة (تبيّن الإحصاءاتُ أنها تمطر سنوياً).

$\frac{1}{2}$ ـ احتمالُ أخذ فردةِ الحذاء اليسرى من فَرْدتين عَشْوائياً.

$\frac{1}{7}$ ـ احتمالُ أن يكونَ عيدُ ميلادك يومَ الأحد.

0 ـ احتمالُ أن ينزلَ روادُ الفضاءِ على سطحِ الشمس.



1 ـ تعني أن وقوعَ الحدث مؤكدٌ إلى أقصى حد. والصفر يعني أن الاحتمالَ بعيدُ الوقوعِ حتى ليعدُّ مستحيلاً.

61

لعبـة البنجـو :

في لعبةِ بنجو أُعلن عن عَشَرةِ أرقام . فما احتمالُ أن تربحَ هذه الورقةُ في الإعلان القادم؟ .

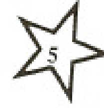
بعد أن أُعلن عن عَشرة أرقام يبقى هنالك 89 رقماً للإعلان الثاني، وتربح هذه الورقة إذا أعلن عن رقم 25 أو 33 فاحتمال ربحها إذن $\frac{2}{89}$.

BINGO

13	17	42	51	65
1	23	33	50	63
10	25	36	48	61
12	27	38	46	62
11	18	45	60	66

تطابـق الأبــراج :

هل تعلمُ أن في كلِّ مجموعة من ثلاثةِ أشخاص هنالك احتمال $\frac{24}{100}$ أي 24%بوجود اثنين منهم من بُرج واحد؟ .



إذن فاحتمالُ أن يكونَ برج اثنين منا واحداً هو حوالي $\frac{1}{4}$ بالنسبة لسلّم الاحتمالات .

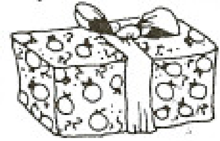
أتعرف لماذا تضربُ الاحتمالين هنا أحدَهما في الآخر؟ انظر القاعدة 1 .

عيد سعيد يا مُنى 4 مارس

عيد سعيد يا إيهاب 12 مارس

عيد سعيد يا غادة 9 يوليو

أَحسُبْ أولاً احتمالَ أنْ يكون الثلاثةُ من أبراجٍ مختلفة . فبرج مُنى هو العقرب . ولما كان هناك 12 برجاً فهناك احتمال $\frac{11}{12}$ أن يكون برجُ غادة مختلفاً . وإذا كانا مختلفين يبقى احتمال عدمِ مطابقة برج إيهاب عنهما بما نسبته $\frac{10}{12}$.

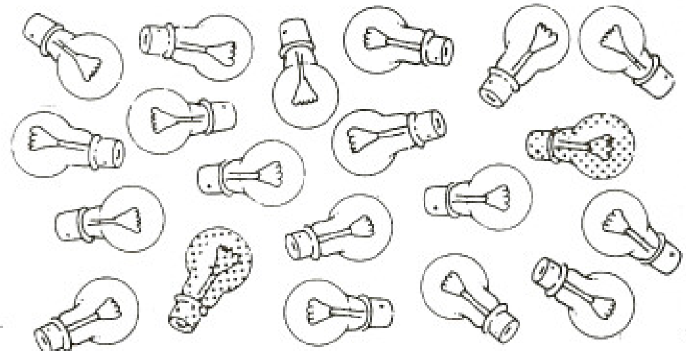


فالاحتمال الكليّ لأن يكونوا جميعاً من أبراج مختلفة هو

$$\frac{11}{12} \times \frac{10}{12} = \frac{110}{144} = 0.76 = 76\%$$.

ضبـط النوعيـة :

مصنعٌ يُنتجُ آلافَ المصابيحِ الكهربائية يومياً ويستحيل أن نفحص كل مصباح على حِدة، ولذا نأخذ عيّنة .



في حالة مصابيح الكهرباء قد نعتبر عيب واحدةٍ في الألف أمراً مقبولاً . إلا أن هذا يؤدّي إلى كوارث في حالة صنعِ طائراتِ ركّاب، حيث تتعرّضُ أرواحُ الناسِ إلى الخطر .

فإذا وجدنا أن واحداً من عشر مصابيح تالف نحكم بأن عُشر المصابيح تالـف .

أجوبة الألغاز والأحاجيّ

الصفحتان 4 و 5 :

كـم؟

الكلمات المرافقة للأعداد قد تكون :

ساعة بالطائرة (1)، أو ساعات بالسيارة (5)، أو كيلومترات (200)، أو أميالاً (125).

المئات والألوف :

1. 2233
2. 13
3. 900
4. الرقم 2 على الأيسر 2000 .
   والرقم 2 على الأيمن 2 .

الصفحتان 6 و 7 :

أعمِل عقلَك :

0.8 أكبر من 0.396 .

0.5، 0.50، 0.500 كلها متساوية .

والأصفار على اليمين تبيّن أن العدد = 0.5 تماماً .

التـدويـر :

2400، 7.22

القسمة على كسور عَشرية :

رغم أن الفاصلة العشرية تبدو وكأنها تتحرك، لكنّ الواقع حقاً أنّ الأرقام تُغيرُ منازلَها .

الصفحتان 8 و 9 :

جمع الأعداد السالبة :

$6 - 2 = 4$؛ $^-7 + 4 = {}^-3$؛ $2 \times {}^-3 = {}^-6$؛ $^-4 \times {}^-2 = 8$؛ $1 \times 3 = 3$.

الموجِّهـات :

الموجّه ب $\binom{^-6}{4}$، الموجه حـ $\binom{8}{^-3}$

الصفحتان 10 و 11 :

2، 4، 8، $128 \div 8 = 16$.

الضرب في 9 :

نعم 684 تنقسم على 9

($4 + 8 + 6 = 18$ ، $8 + 1 = 9$) .

الضرب في 10 :

للضرب في 1000 أضف ثلاثة أصفار .

الضرب في 15 :

أ) 120، ب) 540، حـ) 1380 .

طالب يغلب معلمه : اكتب المجموعين مرّتين متعاكستين، واجمع على الترتيب :

$$\begin{array}{r} 1 + 2 + 3 + \ldots + 998 + 999 + 1000 \\ 1000 + 999 + 998 + \ldots + 3 + 2 + 1 \\ \hline 1001 + 1001 + 1001 + \ldots + 1001 + 1001 + 1001 \end{array}$$

فضعف المجموع = $1000 \times 1001 = 1001000$

والمجموع = 500500 .

الصفحتان 12 و 13 :

تصنيف الأشكال :

هذا المبنى يسمى البنتاجون (كلمة يونانية معناها الشكل الخماسي) .

المضلعات المنتظمة :

يحتاج الشكل إلى عدد لا متناهٍ من الأضلاع قبل أن يصير دائرة .

عائلة المثلثات :

يستحيل رسم مثلث أضلاعه ٥، ٣، ٩ سم لأن طول الضلع الثالث يجب أن يكون أصغرَ من مجموع الضلعين الآخرين .

تناسق الأشكال :

صُنعت الفسيفساء من مربعات ومثلثات ومسدسات متناسقة .

الصفحتان 14 و 15 :

مساحة المستطيلات :

أ = ل × ض تعني أن مساحة المستطيل = الطول × العرض .

أحجية الملعب :

إحدى الوسائلَ لإيجاد مِساحة هذا الملعب أن نقسمه إلى مستطيلين ومثلث، وعندها نستعمل القواعد المعروفـة لإيجاد مِساحات الأقسام، ونجمع هذه المِساحات .

الصفحتان 16 و 17 :

إذا قطعت المخطط من رأسه إلى منتصف قاعدتِه يكون المقطعُ مثلثاً (وهذا بالطبع ليس منحنياً) .

الصفحتان 18 و 19 :

الخطان متساويان، ولكن طرفي السهم تجعلُ الأول يبدو أطول .

تقدير الحجوم :

المكعبات اليسرى مقدارها 17 سم^3، واليمنى 14 سم^3.

لإيجاد حجم الأسطوانة اضرب πنق^2 في الارتفاع، فيكون الحجم πنق^2 ع .

مكعبات البناء :

المتبقي هو الشكل 5.

الصفحتان 20 و 21 :

زوايا المضلع الداخلة :

في المسدس العادي ست زوايا متساوية، وعلى هذا فكل زاوية = 720 / 6 = 120°.

الزوايا على الخط المستقيم :

حـ = 180 − 110 = 70°.

نظرية الزوايا المتقابلة بالرأس :

ا خ ب + ا خ د = 180° لأن د حـ ب خط مستقيم

د خ هـ + ا خ د = 180° لأن أ حـ هـ خط مستقيم أيضاً. وهكذا فإن ا خ ب = د خ هـ

نظرية الزاوية الخارجة :

هـ + أ + ا دْ هـ = 180° لأنها زوايا مثلث؛ هـ + د هـ ح = 180° لأنهما تكونان خطاً مستقيماً. وإذن د هـ ح = ا + ا دْ هـ.

الانحراف والملاحة :

انحراف الباخرة 317°، والمدمرة 251°، والطائرة 68°.

الصفحة 23 :

الشبكات ا، ب، و، ح سالكة.

الصفحة 24 :

تقدير الكسور :

$\frac{1}{3}$ أكبر من $\frac{1}{10}$.

النسبة المئوية :

1. بعد سنة يعطيه المصرف 12 ليرة فائدة.
2. بعد سنة يصير ماله 132 ليرة، وبعد سنتين يصير $132 + \frac{132}{10} = 145.2$.
3. يوفر 48 ليرة من السعر الأصلي لبزة الفضاء.
4. 240 × 80% = 192 ليرة.

الصفحتان 26 و 27 :

مسألة الرهان :

إذا دفعت 8 قروش على الصاروخ وربح تأخذ 100.

فإذا دفعت قرشاً واحداً تأخذ 100 ÷ 8 = 12.5 قرشاً.

مقاييس الرسم :

متر واحد على الخريطة يمثل 2500 م.

الألغاز :

إن حجم الزجاجة ب هو الذي يساوي ضعف حجم ا. أما ارتفاعها فواحد.

لا، فنحن نحتاج إلى عدد الأقراص 8 مرات (أي 2 × 2 × 2) وذلك 400 قرص.

نظرية فيثاغورس :

المثلث الذي أضلاعه 9، 12، 15 فيه زاوية قائمة لأن $9^2 + 12^2 = 15^2$.

الصفحتان 28 و 29 :

المجموعة ا = مجموعة الأشكال ذات الأضلاع الثلاثة (المثلثات)

المجموعة ب = مجموعة الأشكال ذات الأضلاع الأربعة (الرباعية)

ا ∩ ب = { د }: أي أن د في كل من ا، ب. فيكون ع (ا ∩ ب) = 1

ا ∪ ب = {أ، ب، د، و، ط، ك} أي العناصر التي في ا أو ب

فإذن ع { ا ∪ ب } = 6

العنصر الشاذ :

كثيراً ما يكون لمثل هذه المسألة أكثرُ من جواب. فهنا قد تعتبر الدائرة شاذة، لأن الأشكال الأخرى مستقيمة الأضلاع. وقد يعتبر المكعب شاذاً لأن الأشكال الأخرى ذاتُ بعدين وهو ذو ثلاثة أبعاد.

أشكال فن أ ∩ ب ∩ جـ = ∅.

أحجية الطيران :

هنغ كنغ فدلهي، فلندن أو باريس، فنيويورك.

الصفحتان 30 و 31 :

المخطط الدائري : الزوايا الأخرى لأقرب عدد صحيح هي كما يلي:

الفرنسيون = $\frac{108}{500} \times 360 = 78°$.

الألمان = $\frac{100}{500} \times 360 = 72°$.

البريطانيون = $\frac{92}{500} \times 360 = 66°$.

الآخرون = $\frac{75}{500} \times 360 = 54°$.

وتأكد من صحة حساباتك بجمع زوايا هذه القطاعات لتتبين أنه 360°.

بيان التوزيع : يبين هذا الرسم أن أكثر الناس إنفاقاً هم من كانوا في أواسط أعمارهم.

الوسيط والوسط والمتوسط الحسابي :

الوسيط = 350، الوسط = 380، المتوسط = 365.

الإحصائيات لا تكذب :
الرسم الأيمن جعل المسافة بين 1984 و 1985 أصغر، مما يوحي بأن الفقرة الزمنية بينهما أقل .

الصفحتان 32 و 33 :
نظام الإحداثيات : جـ يمثل السيدة العجوز، ا يمثّل الطفل، ب يمثل الرجـل .
أحمد ربح السباق، ولكن الرسم يبين أن بدراً كان سابقاً في البدء .

رسم البيانات :
الإحداثيات هي (1، 6)، (2، 3)، (4، 1)، (5، 3)، (6، 2) .

لغز صورة : الصورة 2 : الساعة 11 ؛ الصورة 7:3 ؛ الصورة 9.5 :

الصفحتان 34 و 35 :
وصف العلاقات : أ : ص = 3 س ؛ ب : 10 − س ؛ جـ : س + 7 .

الصفحتان 36 و 37 : الزاوية المبينة = 100° .

الصفحتان 38 و 39 :
القوى : $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$.
$2^7 \times 3^2 = 2^9$.
$10^{-5} = \frac{1}{10^5}$.

الشكل المعياري : 7.84×10^{11} ؛ 7.62453×10^{-7}

تعيينُ الأعداد الأولية : الأعداد 2، 3، 5، 7، 11 تقسم كل عدد أقل من 169 (وهو 13^2 أي مربع أول عدد أولي بعد 11) إلا الأعداد الأولية . ولذا نستطيع أن نستخدم الأعداد الأولية الخمسة الأولى لإيجاد الأعداد الأولية حتى مربع الأعداد الأولي السادس . وهكذا . .

الصفحتان 40 و 41 :
37 هو 100101 ؛ 1100101 للأساس 2 هو 101 للأساس 10 .

أحجية الواحد الناقص :
في السلم الثنائي قيمة كل منزلة تنقص واحداً عن مجموع قيم المنازل التي تسبقها ففي هذه الحالة : ضاعف 64، وأنقص من المجموع واحداً .

رسائل الحاسوب : يجب أن يكتب العدد 111000 111000111 فإذا أرسلت رقماً واحداً إضافياً فقط تعرف إذا كان هنالك خطأ، ولكن لا تعرف كيف تصلحه .

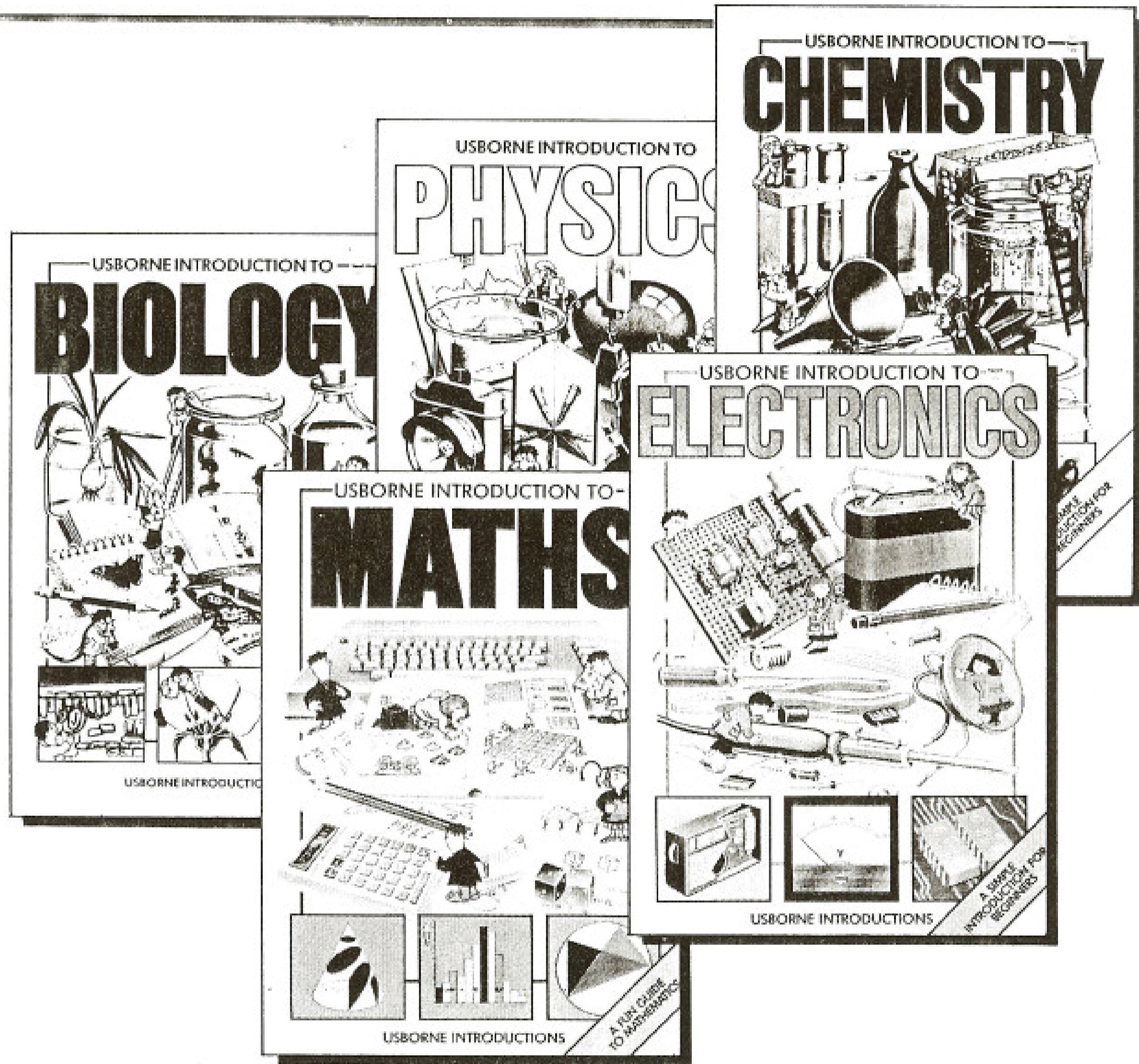
أسس أخرى : 1920 ثانية هي 32 دقيقة .

الصفحة 44 :
تطابق الأبراج : في هذه الأحجية تعتمد النتيجة على وقوع سلسلة من الحوادث . لذا تضربُ احتمالاتها بعضها في بعض .

لوحةُ العلامات :

50 أو أكثر	أنت عبقري
35 أو أكثر	جيد . أنت رياضي جيد .
20-35	متوسط . فإذا فكرت يمكن أن تتحسن .
دون 20	لا عليك . زد من عنايتك تتحسن علامتك .

الكشـــاف



هـذه الـسلسلـة

يقعُ هذا الكتابُ ضمن سلسلةٍ من الكتبِ العلميّةِ الحديثة المبسّطة نضعُها بكلّ اعتزاز في متناول النّاشئةِ وشبابِنا الطّموح ، وكلّنا أمل أنْ تُزوّدَهم بالإجاباتِ الشّافية عن بعض ما يلحّ عليهم من تساؤلات وانْ تحفزَهم على التّبحُّر في شتّى العلوم كي يهضموها ومن ثمّ يبدعوا فيها .